El fracaso de la matemática moderna

Por qué Juanito no sabe sumar

Morris Kline

siglo veintiuno editores

18a. edición

Traducción de

Santiago Garma

EL FRACASO DE LA MATEMATICA MODERNA

¿Por qué Juanito no sabe sumar?

por

Morris Kline

siglo veintiuno editores

siglo veintiuno editores, sa de cv
CERRO DEL AGUA 248, DELEGACIÓN COYOACÁN, 04310 MÉXICO, D.F.

siglo veintiuno de españa editores, sa
CALLE PLAZA 5, 28043 MADRID, ESPAÑA

primera edición en español, 1976

decimoctava edición, 1998

isbn 968-23-1662-6

primera edición en inglés, 1973

título original: *why johnny can't add? the failure of the new math*

impreso y hecho en méxico/printed and made in mexico

INDICE

Yo pregunto si es natural, si es incluso prudente, que te hasties tú mismo y aburras a los estudiantes.

Johann Wolfgang Goethe

PREFACIO

Durante muchas generaciones los Estados Unidos han mantenido un plan de estudios casi invariable en las escuelas primarias y secundarias. Este plan, al cual denominaremos tradicional, se enseña todavía en el 50 ó 60 por 100 de las escuelas americanas. Un nuevo plan de estudios para las escuelas primarias y secundarias ha sido elaborado y ha tenido una aceptación bastante amplia durante los últimos quince años. Es el llamado plan de enseñanza de matemáticas modernas o de nueva matemática. Aunque son muchos los grupos que han contribuido a elaborarlo, y sus recomendaciones no han sido totalmente idénticas, creo que, para el objetivo que nos proponemos, es conveniente dejar de lado sus diferencias.

El trabajo experimental de todo tipo con respecto al nuevo plan ya ha sido hecho. Se han escrito cientos de nuevos textos y millones de niños y jóvenes han sido y están siendo enseñados con este nuevo material. Además se han publicado varias docenas de libros que explican el nuevo plan a los padres, maestros, directores, inspectores y otras partes interesadas. El dinero, tiempo, energía e ideas invertidos en este programa han sido considerables, aún más: enormes.

Las matemáticas ocupan el lugar principal en la escuela. Los estudiantes consagran a las matemáticas ocho años en la escuela primaria y de dos a cuatro años en la secundaria. Por otro lado, esta asignatura ha demostrado ser un obstáculo para que muchos estudiantes pudiesen completar sus estudios en la escuela. Por tanto, es importante saber si el nuevo plan ha mejorado realmente la enseñanza de las matemáticas y ha hecho verdaderamente esta asignatura más accesible para el estudiante.

Ahora que el nuevo programa se ha estabilizado algo y se aclara su naturaleza, parece posible y necesario decidir si realmente se ha progresado. ¿Están nuestros niños realmente más preparados a causa de esta reforma a escala nacional, tan pregonada? Ciertamente la educación de nuestros niños es demasiado importante para que aceptemos un plan sin la menor crítica sólo porque ha sido extensamente promocionado y respaldado por muchos profesores de matemáticas.

Hasta el presente el público en general ha supuesto que la profesión ya se ha manifestado al respecto y que el único problema es cómo extender la enseñanza del nuevo programa a muchas más escuelas. Sin embargo, existen fuertes diferencias de opinión por lo que se refiere a los méritos de las innovaciones entre los matemáticos profesionales y los maestros. Todas las partes interesadas deben examinar la eficacia del nuevo material para que las innovaciones no se impongan como una nueva ortodoxia a pesar de la ausencia de toda evidencia cierta de que estas innovaciones suponen auténticas mejoras. Esto es lo que propongo que se haga.

Espero que el lector opinará, como yo, que cualquier libro que critica un determinado intento de reforma no es *ipso facto* reaccionario. El plan tradicional tiene importantes defectos, que yo citaré. Necesita ser mejorado. Pero me parece que solamente si tenemos el valor de admitir que no se ha hecho un intento especial de reforma es posible el verdadero progreso y puede adoptarse una actitud verdaderamente progresiva.

Estoy en deuda con mucha gente por sus valiosas críticas y sugerencias, y especialmente con el profesor Fred V. Pohle, de la *Adelphi University;* el profesor Alexander Calandra, de la *Washington University*, y el Dr. George Grossman, director de Matemáticas en el *City Board of Education* de Nueva York. También estoy en deuda con Mr. Thomas McCormack, presidente de St. Marti'ns Press, no sólo por sus críticas y sugerencias, sino por su aliento para publicar este libro. Repetidas veces subrayó que la crítica al programa de matemáticas sería un servicio público. Naturalmente, los puntos de vista expresados en este libro sólo pueden ser atribuidos a mí.

Morris KLINE
1973

1. UNA MUESTRA DE LA MATEMATICA MODERNA

«... ¡Gran Dios! Me gustaría ser
un pagano amamantado en un credo gastado.
Así podría...
tener visiones que me hiciesen menos desvalido.»

William Wordsworth

Echemos un vistazo a una clase de matemáticas modernas. La maestra pregunta:

«¿Por qué es $2 + 3 = 3 + 2$?»

Los estudiantes responden decididamente:

«Porque ambos son iguales a 5.»

«No —reprueba la profesora—, la respuesta correcta es: porque se cumple la propiedad conmutativa de la suma.»

La siguiente pregunta es:

«¿Por qué $9 + 2 = 11$?»

De nuevo los estudiantes responden a la vez:

«9 y 1 son 10 y 1 más son 11.»

«Falso —exclama la profesora—. La respuesta correcta es que, por definición de 2,

$$9 + 2 = 9 + (1+1).$$

Pero como se cumple la propiedad asociativa de la suma,

$$9 + (1+1) = (9+1) + 1.$$

Ahora bien, $9 + 1$ son 10, por definición de 10, y $10 + 1$ son 11 por definición de 11.»

Evidentemente, la clase no lo está haciendo muy bien, así que la maestra plantea una pregunta más sencilla:

«¿7 es un número?»

A los estudiantes, desconcertados por la sencillez de la pregunta, les cuesta trabajo creer que es necesario responder; pero el hábito de la pura obediencia les lleva a responder afirmativamente. La maestra se horroriza.

«Si os pregunto quiénes sóis, ¿qué responderíais?»

Los estudiantes, ahora, responden con cautela, pero uno, más valiente, contesta:

«Yo soy Roberto Fernández.»

La maestra le mira con incredulidad y le dice con tono de reprensión:

«¿Quieres decir que tú eres el nombre Roberto Fernández? Desde luego que no. Tú eres una persona y tu nombre es Roberto Fernández. Volvamos ahora a mi pregunta inicial: ¿7 es un número? ¡Claro que no! Es el *nombre* de un número. $5 + 2$, $6 + 1$ y $8 - 1$ son nombres del mismo número. El símbolo 7 es un *numeral* del número.»

La maestra se da cuenta de que los alumnos no aprecian la diferencia e intenta otro camino. «¿Es el número 3 la mitad del número 8?», pregunta. Y se responde a sí misma: «¡Desde luego que no! Pero el numeral 3 es la mitad del numeral 8, la mitad derecha.»

Los estudiantes arden ahora en deseos de preguntar: «¿Qué es entonces un número?» Sin embargo, están tan desanimados por las respuestas equivocadas que han dado que ya no tienen ánimos para plantear la pregunta. Esto le viene muy bien a la maestra, porque explicar qué es realmente un número está más allá de su capacidad y también más allá de la capacidad de comprensión de los alumnos. Así que después de esto los alumnos tendrán cuidado en decir que 7 es un numeral, no un número. Pero nunca sabrán qué es un número exactamente.

Las tristes respuestas de los alumnos no arredran a la maestra, que pregunta: «¿Cómo podremos expresar correctamente todos los números que hay entre 6 y 9?»

«¡Toma! —responde uno de los alumnos—, pues 7 y 8.»

«No —replica la maestra—. Es el conjunto de números, intersección del conjunto de números mayores que 6 y del conjunto de números menores que 9.»

Así se enseña a los alumnos el uso de los conjuntos y, supuestamente, el de la precisión.

La maestra, que estando profundamente convencida del cacareado valor del lenguaje preciso, quiere preguntar a sus alumnos si un número de pirulíes es igual a uno de niñas, hace la pregunta en la forma siguiente: «Hallad si el conjunto de pirulíes está en correspondencia biunívoca con el conjunto de niñas.» No hace falta decir que no recibe ninguna respuesta de sus alumnos.

Cansada, pero no vencida, la maestra pregunta una vez más: «¿Cuántas son 2 dividido por 4?»

Un brillante estudiante dice sin dudar: «Menos 2.»

«¿Cómo has obtenido ese resultado?», pregunta la maestra.

«Bien —dice el alumno—, usted nos ha enseñado que la división es una substracción repetida. Yo resté 4 de 2 y saqué menos 2.»

Podría parecer que los pobres chicos se habían hecho merecedores de algún descanso después de la escuela, pero no; los padres, ansiosos por conocer los progresos hechos por sus niños, también les preguntan. Un padre le pregunta a su hijo de ocho años: «¿Cuántas son 5 + 3?» Por toda respuesta obtiene que 5 + 3 = 3 + 5, por la propiedad conmutativa. Asombrado, vuelve a preguntar: «Pero, ¿cuántas son 5 manzanas y 3 manzanas?»

El niño no comprende bien que «y» significa «más» y pregunta: «¿Quieres decir 5 manzanas más 3 manzanas?»

El padre se apresura a responder afirmativamente y espera atento.

«¡Oh! —dice el niño—, no importa si son manzanas, peras o libros; en cada caso, 5 + 3 = 3 + 5.»

Otro padre, preocupado por los progresos de su hijo en aritmética, le pregunta cómo va.

«No muy bien —responde el niño—. La maestra se dedica a hablar de las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. Yo hago las sumas bien, pero a ella no le gustan.»

Estos ejemplos intrascendentes nos permiten ilustrar, y quizá caricaturizar, algunas de las características del ahora

llamado plan de matemática moderna o de nueva matemática. Examinaremos sus características principales con mayor detalle en el momento oportuno y señalaremos sus ventajas y defectos. Pero antes revisaremos brevemente las «viejas» matemáticas y veremos qué defectos instaron al desarrollo de un nuevo plan.

2. EL PLAN DE ESTUDIOS TRADICIONAL

«Le he dado un argumento, pero no estoy obligado a hacérselo comprender.»

Samuel Johnson

Aunque en los últimos años el plan de enseñanza tradicional en los Estados Unidos se ha visto algo afectado por el espíritu de reforma, sus características esenciales se pueden describir en pocas palabras. Los seis primeros cursos de la escuela primaria están dedicados a la aritmética. En los cursos séptimo y octavo los alumnos aprenden un poco de álgebra y elementos de geometría, como las fórmulas de áreas y volúmenes de las figuras más frecuentes. En el primer curso de secundaria se estudia álgebra elemental; en el segundo, geometría, y en el tercero, más álgebra (generalmente llamada álgebra intermedia) y trigonometría. Generalmente el cuarto curso de secundaria está dedicado a la geometría y el álgebra superior; sin embargo, sobre el trabajo del cuarto curso no hay tanta unanimidad como sobre el de los primeros.

Repetidamente se han expresado varias y serias críticas a este plan. La crítica más importante, que se dirige contra el álgebra en particular, es que impone un proceso mecánico y por tanto fuerza al alumno a confiar sobre todo en la memoria antes que en la comprensión.

Fácilmente se puede ilustrar la naturaleza de tal proceso mecánico. Pongamos un ejemplo de aritmética. Para hacer la suma de las fracciones 5/4 y 2/3, es decir, para calcular

$$\frac{5}{4}+\frac{2}{3}$$

los estudiantes saben que tienen que hallar el mínimo común denominador, es decir, el menor número al que 4 y 3 dividen exactamente. Este número es 12. Entonces al dividir 12 por 4 se obtiene 3 y este resultado se multiplica por el numerador de la primera fracción, 5. Igualmente se divide 12 por 3 y el resultado 4 se multiplica por el numerador de la segunda fracción, 2. El resultado que se obtiene es la conversión de la suma anterior en una suma igual

$$\frac{15}{12}+\frac{8}{12}.$$

Fácilmente se ve ahora que la suma es 23/12.

Un buen maestro no dudaría en hacer todo lo posible para ayudar a comprender la fundamentación de este proceso, pero, por lo general, el plan tradicional no presta mucha atención a la comprensión. Confía en la práctica para lograr que los alumnos hagan el proceso rápidamente.

Después que los alumnos han aprendido a sumar fracciones numéricas, se encuentran con una nueva dificultad cuando se les pide sumar fracciones en las que hay letras. Aunque se sigue el mismo procedimiento para calcular

$$\frac{3}{x+a}+\frac{2}{x-a},$$

cada paso es más complicado. De nuevo, el plan confía en la práctica para pasar la lección. Se pide a los alumnos que practiquen con numerosos ejercicios de suma hasta que los pueden resolver con rapidez.

Se enseñan multitud de procedimientos como el anterior: descomponer en producto de factores, resolver ecuaciones con una o dos incógnitas; uso de los exponentes, suma, substracción, multiplicación y división de polinomios y operaciones con números negativos y con radicales como $\sqrt{3}$. En cada caso se les pide que imiten lo que el maestro y el libro hacen. Por tanto, los alumnos se enfrentan con una variedad desconcertante de procedimientos que aprenden de memoria a fin de dominarlos. Casi siempre el aprendizaje es completamente memorístico.

También es verdad que los varios procedimientos están desconectados entre sí, por lo menos tal como se les presenta habitualmente. Raramente están relacionados. Aunque todos estos procedimientos contribuyen al objetivo de lograr que los alumnos realicen operaciones algebraicas, en matemáticas superiores, por lo que los alumnos alcanzan a ver, los temas son inconexos. Son como páginas arrancadas de un centenar de libros diferentes, ninguno de los cuales expresa la vida, el significado y el espíritu de la matemática. Esta exposición del álgebra no se sabe ni dónde empieza ni dónde acaba.

Después de un año de estudiar este tipo de álgebra en el plan tradicional, se pasa a la geometría euclídea. Aquí la matemática se hace de repente deductiva. Es decir, que el texto comienza con las definiciones de las figuras geométricas y con los axiomas o definiciones básicas sobre las figuras que se supone son «obviamente ciertas». Luego se demuestran los teoremas aplicando a los axiomas razonamientos deductivos. Los teoremas se deducen uno de otro en sucesión lógica; es decir, que la demostración de los últimos teoremas depende sobre todo de las conclusiones obtenidas en los primeros. El repentino cambio del álgebra mecánica a la geometría deductiva es verdaderamente molesto para la mayor parte de los alumnos. Hasta ahora no han aprendido, durante su educación matemática, lo que es una «demostración» e inevitablemente deben dominar este concepto además de aprender a dominar la propia materia.

En matemáticas es fundamental el concepto de demostración y así en geometría los alumnos tienen la oportunidad de aprender lo más característico de la asignatura. Pero puesto que la demostración final deducida de un teorema es generalmente el resultado final de un montón de conjeturas y experimentaciones, y a menudo depende de un esquema ingenioso que permite demostrar el teorema en la adecuada sucesión lógica, la demostración no es necesariamente la natural, es decir, la que se le ocurriría inmediatamente al adolescente. Por otra parte, el argumento deductivo no da idea de las dificultades que hubo que superar al hacer por primera vez la demostración. Así pues, el alumno no puede comprender el razonamiento de ésta y hace en geometría lo mismo que en álgebra. Aprende de memoria la demostración.

Otro problema preocupa a muchos alumnos: si el álgebra forma también parte de las matemáticas, ¿por qué se exige una demostración deductiva en geometría y no en álgebra? Este problema se acentúa cuando los alumnos llegan al álgebra intermedia, generalmente después del curso de geometría, cuando las demostraciones se sustituyen por las técnicas.

Con o sin demostración, el método de enseñanza tradicional es el resultado de un tipo de enseñanza: la memorización. La afirmación de que tal tipo de exposición enseña a pensar es sumamente exagerada. Para ponerlo en evidencia, si es que esta evidencia es necesaria, he desafiado a cientos de profesores de enseñanza secundaria y de *colleges* * a hacer exámenes con libros. Esta sugerencia les escandaliza; pero si estuviéramos enseñando a pensar realmente y no a memorizar, ¿de qué les iban a servir los libros a los alumnos?

El plan tradicional se ha hecho demasiado tradicional. Algunos de los temas en los que se había insistido considerablemente, durante generaciones, han perdido importancia, aunque aún se estudian. Un ejemplo es la resolución de triángulos en trigonometría. Conociendo algunos datos —lados y ángulos— de un triángulo, la teoría enseña cómo obtener los restantes elementos, e incluso cómo utilizar los logaritmos en los cálculos. Esta cuestión, que tenía más importancia cuando en un principio la trigonometría se enseñaba a los futuros topógrafos, la ha perdido hace tiempo. Otro ejemplo es el de la obtención de raíces irracionales de ecuaciones polinómicas. El método que habitualmente se enseñaba, llamado método de Horner, requería un aprendizaje de varias semanas, y esto no estaba justificado.

* En Estados Unidos los primeros años de enseñanza a nivel universitario se cursan en un *college*. (*N. del T.*)

También hay defectos lógicos secundarios en el plan tradicional. Por ejemplo, se enseña a los estudiantes que $x^2 - 4$ puede descomponerse en los factores $(x+2)(x-2)$, pero que esto no es posible para $x^2 - 2$. Sin embargo, esta última expresión sí se puede descomponer en factores cuando queremos introducir números irracionales. En este caso los factores son $x - \sqrt{2}$ y $x + \sqrt{2}$. Igualmente, $x^2 + 4$ puede descomponerse en factores si queremos usar números complejos. En este caso los factores son $x + 2i$ y $x - 2i$, donde $i = \sqrt{-1}$. Así que el error cometido por el método tradicional de enseñanza consiste en no especificar la clase de números que queremos manejar con objeto de obtener la descomposición en factores.

Además de los pocos fallos que ya hemos descrito, el plan tradicional de enseñanza se resiente del defecto más grave que se pueda achacar a cualquier plan: la falta de motivación. La verdadera matemática, como decía el famoso matemático de este siglo Hermann Weyl, tiene las propiedades inhumanas de la luz de las estrellas, es brillante y nítida, pero fría. También es abstracta. Trabaja con conceptos, aunque algunos, tales como los geométricos, pueden visualizarse. Por ambos motivos, la frialdad y la abstracción, muy pocos estudiantes se sienten atraídos por la materia.

La gente joven comprende sin duda que hay alguna razón para aprender aritmética, pero no ve el motivo para estudiar álgebra, geometría y trigonometría. ¿Por qué han de aprender la suma de fracciones algebraicas, la resolución de ecuaciones, la descomposición en factores y otros temas parecidos? El atractivo de la geometría no es mayor. Es verdad que los estudiantes pueden ver de qué trata la geometría y qué afirman los teoremas; las figuras revelan de qué se ocupa esta rama de la matemática. Pero la pregunta de por qué se debe estudiar esta asignatura, aún no ha sido respondida. Es fácil comprender en qué consiste la historia de China, pero cabe preguntarse por qué se está obligado a aprenderla. ¿Por qué es importante saber que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales o que las alturas de un triángulo se cortan en un punto?

Evidentemente, no se puede defender el álgebra, la geometría y la trigonometría diciendo que se utilizarán después en la vida práctica. Los profanos no tienen nunca ocasión de usar estos conocimientos a menos que lleguen a ser científicos, matemáticos o ingenieros profesionales. Pero este grupo sólo lo forma un pequeño porcentaje del alumnado de enseñanza secundaria. Además, aun si todos los alumnos fuesen a usar las matemáticas más adelante en su vida, esto podría no motivar su interés. A los jóvenes no se les puede pedir seriamente que aprendan algo porque pueden necesitarlo en años sucesivos. Esta motivación a menudo se describe como «ofrecer la luna».

El caso es que, en un esfuerzo por interesar a los alumnos, las escuelas trataron de enseñar algunas aplicaciones de la aritmética en los cursos séptimo y octavo. Enseñaban interés simple y compuesto y descuento en préstamos. Pero los alumnos de doce y trece años no se interesaron por tales cuestiones y el experimento resultó un fracaso. La motivación debe atraer al alumno en el momento que cursa los estudios.

Otra motivación que a menudo se ofrece a los estudiantes es que deben estudiar matemáticas para entrar en el *college*. Si las matemáticas que les han enseñado en la escuela primaria y secundaria son una muestra de lo que van a aprender en el *college*, puede que ellos no quieran ir al *college*.

Los futuros matemáticos, científicos e ingenieros encontrarán que las matemáticas son útiles en sus carreras. Pero si las matemáticas que se les ofrecen no indican en qué serán útiles y carecen totalmente de atractivo, decirles a los estudiantes que son necesarias para la ciencia y la ingeniería sólo les animará a buscar otra carrera.

A menudo se defiende la enseñanza de las matemáticas como un «entrenamiento mental». Puede muy bien ser un entrenamiento, pero es posible lograr el mismo efecto con un contenido que sea más comprensible y agradable. Se podrían enseñar las formas de razonamiento usadas comúnmente recurriendo a problemas sociales o sencillamente legales cuya importancia en la vida es mucho más clara para los estudiantes. No se necesitan matemáticas para enseñar a la gente que decir «todos los coches buenos son caros» no es igual que decir «todos los coches caros son buenos». Además, el uso de problemas sociales o legales no requiere el dominio del lenguaje técnico, el simbolismo y los conceptos abstractos que tienden a oscurecer el razonamiento. Así pues, es mucho más difícil para el estudiante comprender que la afirmación «todos los paralelogramos son cuadriláteros» no es igual que «todos los cuadriláteros son paralelogramos». De hecho, la experiencia en la enseñanza muestra que a fin de hacer comprensibles para los estudiantes los argumentos lógicos que se usan en los razonamientos matemáticos, se deben utilizar ejemplos no matemáticos que contengan los mismos argumentos. Por otra parte, está la cuestión de si el entrenamiento mental en una esfera es aplicable en otra. Hay motivos para inclinarse a crer que es así, pero no es posible probarlo.

Otra justificación que se da habitualmente del estudio de las matemáticas a nivel de enseñanza media es la belleza de la asignatura. Pero sabemos que los temas enseñados no han sido seleccionados por su belleza. Han sido escogidos porque son necesarios para el estudio posterior de la matemática. No hay belleza alguna en la suma de las fracciones, en la resolución de la ecuación de segundo grado o en la fórmula del seno. Todos los sermones o delirios del mundo acerca de la belleza de las matemáticas no podrán hacer atractivo este «patito feo». Además, los neófitos no están dispuestos a encontrar belleza en materias que aún están tratando de dominar; al igual que el que está aprendiendo gramática francesa no puede apreciar la belleza de la literatura francesa.

Las matemáticas atraen a unos pocos estudiantes por estímulo intelectual o porque les gusta algo que esperan hacer bien. El raro estudiante que experimenta este estímulo puede verdaderamente sentirse intrigado —como algunos matemáticos— por el hecho de que sólo haya cinco poliedros regulares. Sin embargo, por lo que respecta a la mayor parte de los estudiantes, el mundo sería igualmente cómodo si hubiese un número infinito de ellos. De hecho, hay un

número infinito de polígonos regulares y nadie parece deprimido por ello.

Verdaderamente hay un valor intelectual en las matemáticas. Pero cabe preguntarse si los jóvenes pueden apreciarlo, de igual manera que cabe preguntarse si un niño de seis años puede apreciar la música de Beethoven. Si el profesor demuestra un teorema de matemáticas, el alumno aún estará luchando por comprender el teorema, su demostración y su significado. Mientras el estudiante libre tales luchas no es probable que se impresione con el contenido intelectual y los logros de la mente humana. En él, el teorema y la demostración producen desconcierto y confusión.

Además de los pretendidos valores del entrenamiento mental, la belleza y el estímulo intelectual, los defensores del plan tradicional destacan los problemas. Estos, dicen ellos, enseñan el uso de las matemáticas y convencen al estudiante de que el tema es importante. Hay problemas tales como el del hombre que está cavando un foso. «Un hombre puede cavar un foso en dos días y otro en tres días. ¿Cuánto tiempo necesitarán los dos hombres para cavarlo juntos?» Tales problemas crean trabajos inútiles.

También están los problemas de llenar depósitos para estudiantes que no tienen piscina que llenar. Y problemas de mezclas como: «¿Cuántos litros de leche con un diez por ciento de crema y cuántos con un cinco por ciento de crema deben mezclarse para obtener cien litros de leche con un cincuenta por ciento de crema?» Estos problemas son útiles para los granjeros que quieran falsificar el contenido de crema de su leche. Otros problemas son los de mezclar marcas de café o té para hacer brebajes impotables.

También hay problemas de edades: «Juana es veinte años mayor que María. Dentro de diez años, Juana será dos veces mayor. ¿Qué edad tiene María?» Este tipo de problemas exige averiguar la edad de otras personas, y mucha gente es muy susceptible acerca de su edad.

Hay también problemas de números tales como «Un número es igual a tres veces otro número menos dos. ¿Cuáles son los números?» (Las trampas de números son actualmente ilegales.) Más «reales» son los problemas de tablas.

«Una tabla de siete metros de largo debe ser cortada en dos partes, una de ellas dos metros más larga que la otra. ¿Qué longitud tienen las dos partes?» Naturalmente los alumnos terminan aburridos con los problemas de tablas.

Y no debemos olvidar los problemas de tiempo, proporciones y distancias, tales como el de cruzar un río perpendicularmente, destinados a estudiantes que no están interesados en ir a ningún sitio. Algunos de los problemas se refieren a paseos por un jardín circular y preguntar la dimensión del jardín. Si permitiéramos a los estudiantes pasear por un jardín en una agradable compañía haríamos más felices a los estudiantes.

Todos estos problemas son desesperadamente artificiales y no convencerán a nadie de que el álgebra es útil.

Algunos de los autores de textos de álgebra hacen hincapié en los problemas de física «auténticos». Por ejemplo, la ley de Ohm dice que el voltaje V es igual a la intensidad I por la resistencia R. En símbolos, $V = IR$. Calcular V si $I = 20$ y $R = 30$. Pero la corriente que se utiliza en el problema no mueve ningún motor mental. Por lo que sabe el estudiante, la ley de Ohm podría describir el número de matrimonios que se celebran en Birmania cada año.

Durante generaciones los textos de cálculo infinitesimal han enseñado a los estudiantes a calcular los centros de gravedad y momentos de inercia de los cuerpos sin que nunca se señalase por qué estas cantidades son importantes. En consecuencia, la gravedad de estos problemas no produce sino inercia en los estudiantes. Tales problemas de física, planteados sin exponer ni sus antecedentes ni su significado físico, carecen de sentido para el estudiante. Está claro que una aplicación física es inútil si el estudiante no puede ver cómo se utiliza.

Aun el uso de la palabra «aplicación» es a menudo molesto. Supongamos que se enseña a los estudiantes la fórmula de un área y se les pide calcular áreas con ella. Se supone los cálculos que son una «aplicación». Esta clase de aplicaciones no hacen más que añadir leña al fuego. Puesto que las llamadas aplicaciones son inútiles y sin embargo forman parte de la matemática, ¿en qué sentido son aplicaciones?

El hecho es entonces que en el plan tradicional no se ofrece ninguna motivación para el estudio de las matemáticas. Los estudiantes lo hacen porque se les obliga. La motivación es algo más que un estímulo psicológico. La motivación auténtica, además, permite comprender el verdadero significado de la matemática. Gran parte de la matemática, especialmente la de nivel elemental, fue originada directamente por situaciones y problemas reales. La simple fórmula $s = 16t^2$ adquiere significado cuando se aprende que relaciona la distancia recorrida por un objeto en una caída con el tiempo que tarda en caer. Una elipse se convierte en algo más que otra curva cuando se aprende que es la trayectoria de un planeta alrededor del sol. Además las preguntas que sugieren la fórmula y la curva adquieren significado al relacionarse con situaciones físicas. El significado físico permite también, al menos en muchos casos, pensar en los problemas de matemática que se han planteado, ya que la matemática no es más que una descripción de la física y un medio de resolver problemas físicos y de otro tipo.

Si no se da un significado a las matemáticas es como si se enseñara a los estudiantes a leer la notación musical sin permitirles interpretar la música. Puede enseñarse a los estudiantes a reconocer una redonda, una blanca, un sostenido, un bemol, la clave y cómo cambiar la música de una clave a otra sin haber oído nunca música. Pero si no oyen lo que estas diversas notaciones y técnicas significan, serán para ellos conocimientos aburridos y carentes de significado.

El plan tradicional ha sido fielmente reproducido en miles de libros de texto. La impresión más general sobre los textos tradicionales es que son insufriblemente pesados. La mayor parte de los autores de libros de texto parecen creer que una obra científica debe ser fría, sin imaginación, mecánica y seca. Estos libros no tienen autor. No sólo están impresos por máquinas, también están escritos por máquinas.

Los autores de libros de texto también parecen estar excesivamente orgullosos de su brevedad, la cual, a menudo, puede interpretarse como incomprensibilidad. Las razones de los pasos o no se dan o se dan de forma tan breve que la exposición resulta casi inútil para el estudiante. Muchos de los autores parecen estar diciendo: «Yo he aprendido este tema y ahora le desafío a usted que lo aprenda.» La brevedad en la exposición matemática es la esencia de la estupidez y la oscuridad.

Lo peor de muchos textos tradicionales de matemáticas es que carecen de originalidad y se repiten unos a otros interminablemente. Desde 1900 han sido publicados varios miles de textos de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. Prácticamente todos los textos de cualquiera de estos temas utilizan los mismos materiales y la misma exposición; sólo el orden es diferente. Sin embargo, hay alguna esperanza de «progreso», ya que cada uno de ellos contiene al menos diez temas y el número de permutaciones de diez objetos es de 3.628.800. Sería difícil calcular cuántos textos de trigonometría han sido escritos con la justificación de que tratan el ángulo en general antes que el ángulo agudo. Se puede estar seguro, sin embargo, de que serán tantos como los que alardean de tratar el ángulo agudo antes que el ángulo en general. Lo único agudo de estos libros es el dolor que producen al lector.

¿Hay variaciones entre estos libros? Hay variaciones tales como el álgebra elemental y el álgebra superior, el álgebra superior elemental y el álgebra elemental superior, el medio curso y el curso completo, el curso de siete octavos y así sucesivamente. Aquí también cabe alguna esperanza de «progreso», porque como hay números irracionales podemos confiar en que habrá cursos de álgebra irracional.

Lo especialmente molesto de estos libros es que muchos de los autores son conscientemente deshonestos en su profesión. Una vez pregunté a un profesor que había escrito muchísimas trigonometrías completas o parcialmente completas, por qué incluía temas tan inútiles como la solución de triángulos oblicuos mediante las relaciones entre las tangentes y los ángulos mitad. Admitió que estos temas no

tienen valor, pero dijo que los incluía porque los libros se vendían mejor. Según parece, por muchas trigonometrías que escriba un hombre, ninguna reflejará su opinión sinceramente.

Pregunté a otro profesor, que había publicado una álgebra estereotipada para uso de *colleges*, por qué se molestaba en escribir tales retahilas sin sentido. «¡Oh! —me dijo—. Puedo escribir esto entre clase y clase sin tener que pensar. ¿Por qué no lo iba a hacer?» No es preciso decir que la falta de pensamiento era evidente en la presentación del material.

Otro profesor publicó un libro que contenía algunos temas que él creía sin importancia. Esto lo admitía en el prefacio, y añadía cándidamente que los incluía con vistas al mercado. ¡Qué deshonestidad más honesta!

Los autores que repiten los temas de otros, en cierto modo se plagian. Pero el plagio va más allá de esto. Fácilmente se encuentran paráfrasis de partes completas de muchos apartados. Un autor copia capítulos completos de otro libro con cambios mínimos, reconociendo, naturalmente, la inspiración de Dios, Euclides, Newton y Einstein.

La mayor parte de los textos de matemáticas tradicionales parecen trabajos comerciales que sólo contribuyen a llenar el bolsillo del autor. La ética de algunos profesores, por no hablar de su mentalidad, se encuentra en estado lamentable. Los únicos que pueden reclamar que se les reconozca el mérito de un trabajo original en relación con estos libros son los encargados de la publicidad de las editoriales, que deben imaginar buenos y atractivos anuncios.

La imparcialidad exige que se mencionen las recientes mejoras en el formato de los textos de matemáticas. Las fórmulas importantes ahora se encuadran en rojo. Otros textos usan láminas de plástico para mostrar, superponiendo las transparencias sobre la figura original en el texto, cómo va aumentando la complejidad de la figura.

Evidentemente, los defectos del plan tradicional son numerosos. La confianza en la memorización de desarrollos y demostraciones, el tratamiento dispar del álgebra y la geometría, los defectos lógicos secundarios, la conservación de temas anticuados, la falta de toda motivación o atractivo explican por qué a los jóvenes no les gusta la asignatura y, por tanto, no avanzan en ella. La aversión a las matemáticas se intensifica y las dificultades de comprensión aumentan al tener que leer libros de texto oscuros, pobremente escritos y concebidos con fines comerciales.

Cierto es que la reforma era necesaria. Los iniciadores del nuevo movimiento matemático no citaron todos los defectos anteriores. Sin embargo señalaron algunos de ellos. Así que vamos a ver ahora qué propuso hacer esta gente y a intentar valorar las mejoras efectivas que introdujeron en la enseñanza de las matemáticas.

3. EL ORIGEN DEL MOVIMIENTO DE LA MATEMATICA MODERNA

«La experiencia, sin embargo, enseña que para la mayoría de la gente culta, e incluso de los científicos, las matemáticas siguen siendo la ciencia de lo incomprensible.»

Alfred Pringsheim

A comienzos de los años cincuenta, e incluso antes, todo el mundo estaba de acuerdo en que la enseñanza de las matemáticas era insatisfactoria. El nivel de los estudiantes en matemáticas era más bajo que en las otras asignaturas. La aversión e incluso el terror estudiantil a las matemáticas estaban muy extendidos. Los adultos no recordaban casi nada de las matemáticas que habían aprendido y no sabían efectuar operaciones sencillas con fracciones. De hecho, no vacilaban en decir que no habían sacado nada en limpio de sus cursos de matemáticas. Cuando los Estados Unidos entraron en la segunda guerra mundial, los militares descubrieron rápidamente que los hombres estaban mal preparados en matemáticas y tuvieron que organizar cursos especiales para elevar el nivel de conocimientos.

Aunque hay muchos factores que determinan el resultado de cualquier actividad docente, los grupos que acometieron la reforma se centraron en el plan y razonaron que si se perfeccionaba este componente, la enseñanza de las matemáticas sería un éxito.

En 1952 el comité de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Illinois, dirigido por el profesor Max Beberman, comenzó a elaborar un nuevo o moderno plan de matemáticas. Hacia 1960 el plan (que en aquella fecha solamente había sido concebido para la enseñanza secundaria) fue probado en un grupo experimental. Más adelante, el comité comenzó a confeccionar un plan para la escuela primaria y gradualmente extendió la enseñanza de los temas de la enseñanza primaria y media a otras áreas geográficas. Los textos experimentales, fotocopiados, fueron finalmente publicados como textos comerciales.

En 1955, la College Entrance Examination Board, cuya función es preparar exámenes de ingreso en los *colleges* que cumplan los requisitos exigidos por la mayor parte de ellos, decidió atacar el problema del plan de matemáticas para la enseñanza secundaria y elaborar lo que consideraron el plan adecuado. Esto les llevó a la creación de su propia comisión de matemáticas. En 1959, la comisión distribuyó su informe, el *Program for College Preparatory Mathematics*, y añadió varios apéndices con ejemplos de temas recomendados. Durante los años 1955 a 1959, y también durante varios años después, los miembros de la comisión recorrieron el país haciendo propaganda del plan que proponían en su *Programa*.

En otoño de 1957 los rusos lanzaban su primer Sputnik. Este acontecimiento convenció al gobierno y al país de que Estados Unidos estaba por detrás de los rusos desde el punto de vista de las matemáticas y la ciencia, y tuvo el efecto de aflojar la bolsa de los organismos gubernamentales y de las fundaciones. Puede que fuese una coincidencia, pero en ese momento otros muchos grupos decidieron participar en la elaboración de un nuevo plan.

La American Mathematical Society, organización dedicada a la investigación, decidió en 1958 aplicar todos sus esfuerzos a la redacción de un plan para la enseñanza secundaria y creó un nuevo grupo, el *School Mathematics Study Group*, dirigido por Edward G. Begle, entonces profesor de la Universidad de Yale, para acometer la tarea. Este grupo comenzó su trabajo redactando un plan para todos los cursos de la enseñanza secundaria, y luego amplió su programa para incluir el plan de aritmética de las escuelas primarias.

El National Council of Teachers of Mathematics organizó su propio comité para el plan, el Secondary School Curriculum Committee, que dio a conocer sus recomendaciones en un artículo publicado en *The Mathematics Teacher* en mayo de 1959. Otros muchos grupos, tales como el Ball State Project, el University of Maryland Mathematics Project, el Minnesota School Science and Mathematics Center y el Greater Cleveland Mathematics Program, pronto fueron organizados y comenzaron su trabajo.

Los profesores de enseñanza secundaria y de *college* comenzaron a finales de los años cincuenta a escribir sus propios textos siguiendo la línea ya prevista o expresamente recomendada por dichos grupos. Un torrente de libros de este tipo había aparecido ya a comienzos de los años sesenta y muchos más han continuado apareciendo desde entonces.

Sorprendentemente, los numerosos grupos y escritores independientes siguieron todos aproximadamente la misma dirección. Por tanto, su obra, con bastante razón, ha sido descrita con el término de «matemática moderna» (o «nueva matemática»).

El origen del término «matemática moderna» es significativo. Antes de que los miembros de la Comisión de Matemáticas hubiesen determinado qué iban a recomendar, se dirigieron a un buen grupo de profesores. El contenido principal de su mensaje era que la enseñanza de las matemáticas había fracasado porque el plan tradicional enseñaba unas matemáticas anticuadas, entendiendo por ello las matemáticas creadas antes de 1700. Estaba implícito en el argumento el supuesto de que los jóvenes conocían este hecho y que, por tanto, se negaban a aprender matemáticas. ¿Iría usted, argumentaban estos educadores, a un abogado o a un médico cuyos conocimientos estuviesen limitados a lo que se sabía antes de 1700? Aunque estos portavoces estaban sin duda bien informados sobre las matemáticas, ignoraban el hecho de que las matemáticas se desarrollan en forma acumulativa y que es prácticamente imposible aprender los últimos procesos si no se conocen los anteriores. No obstante, la Comisión mantenía que debíamos abandonar los temas de la matemática tradicional en favor de campos tan nuevos como el álgebra abstracta, la topología, la lógica simbólica, la teoría de conjuntos y el álgebra de Boole. La consigna de la reforma era: «matemáticas modernas».

Así pues, la reforma ofrecía tanto un nuevo enfoque del plan tradicional como un nuevo contenido, y algunos grupos destacaron este hecho. Por eso el término matemática moderna no es realmente el adecuado para describir el nuevo plan. Sin embargo, quizá porque el valor propagandístico de la palabra «moderno» era demasiado grande como para desperdiciarla —está claro que es más deseable un automóvil de 1970 que uno de 1969—, se conservó el término matemática moderna o nueva matemática.

Aunque el plan de moderna o de nueva matemática, tal como ha llegado hasta hoy, fue elaborado por los grupos ya mencionados, nuevos grupos aparecieron en la escena y comenzaron a recomendar reformas más radicales. Por ejemplo, una conferencia internacional celebrada en Royaumont (Francia) en 1959 instaba virtualmente el abandono de todos los métodos familiares en las matemáticas de enseñanza secundaria, incluso de la geometría de Euclides. La conferencia declaró que estos planteamientos habían sido superados por la electrónica, la relatividad, los ordenadores y la inmensa importancia de las matemáticas abstractas como base de la ciencia moderna. Las nuevas materias serían la lógica, la estructura y la unidad de las matemáticas en conjunto y serían enseñadas con un nuevo lenguaje. Esta conferencia no dio lugar a la nueva formación de otros grupos para hacer un plan, pero incitó a iniciar otros derroteros partiendo del plan tradicional.

Entre los nuevos grupos que propusieron las reformas más radicales mencionaremos dos. Durante el verano de 1963 un grupo de matemáticos asistió a la Cambridge Conference on School Mathematics (su informe, *Goals for School Mathematics*, fue publicado por la Houghton Mifflin Company). Este grupo recomendó la inclusión —al final del doceavo curso, cuarto año de enseñanza secundaria— de muchos temas adicionales avanzados sacados de la teoría de los números, el álgebra abstracta, el álgebra lineal, la geometría n-dimensional, la geometría proyectiva, tensores, topología, ecuaciones diferenciales y, naturalmente, el cálculo infinitesimal. En la página 7 afirmaba: «Los temas que proponemos pueden ser descritos a grandes rasgos diciendo que un estudiante que ha estudiado matemáticas durante trece años, de los cursos 1 al 12 (es decir, desde la escuela primaria hasta el cuarto año de bachillerato), tendría que tener un nivel comparable a los tres años de enseñanza al más alto nivel en un *college* de hoy día.»

La justificación de abogar por tal programa, cuando los grupos ya existentes en torno al plan apenas habían comenzado a poner en práctica sus programas o aún los estaban elaborando, fue dada en el prefacio por Francis Keppel, comisario de Educación de los Estados Unidos. En él señalaba que los cambios recientes de plan eran esencialmente diferentes de los intentados en el pasado y que las reformas habían tenido un gran éxito, en su mayor parte (no está claro cómo podía saber esto el doctor Keppel en 1963, cuando la mayor parte de los nuevos planes apenas habían sido llevados a la práctica), hasta el punto de que «a veces ha sido difícil distinguir sus defectos. Sin embargo, los defectos están allí y no son en modo alguno insignificantes. Se puede argumentar, de hecho, que las deficiencias del actual movimiento de reforma son lo suficientemente graves como para amenazar los objetivos expresos de los movimientos.» Keppel entonces apuntaba que los cambios recomendados por el grupo de Cambridge trataban de presentar la asignatura tal como la ven los estudiantes y que se suponía que los estudiantes podían aprender mucho más de lo que se había esperado en el pasado. Las limitaciones del profesor eran señaladas también. «La mayor parte de los planes de reforma, bastante prácticamente, han preferido limitar sus ambiciones a la luz de estas realidades. Han tendido a crear tantos nuevos métodos como puedan utilizar de forma competente los profesores existentes, después de obtener el beneficio de una breve reeducación. Lo han hecho perfectamente conscientes de que estaban así estableciendo un límite superior, límite desagradablemente reducido.»

Keppel continuaba: «Si la cuestión fuese acabar allí, el resultado podría ser desastroso. El nuevo plan se congelaría en el sistema educativo y acabaría por tener, con el tiempo, todas las deficiencias del plan que ahora se está barriendo. Y con toda probabilidad el actual entusiasmo por el plan de reforma tardará en agotarse; el "nuevo" plan puede permanecer en el sistema hasta que, como el antiguo, se vuelva no solamente inadecuado sino, de hecho, intolerable. Dado el relativo conservadurismo del sistema educativo y la tendencia del escolar a ocuparse de lo que le afecta directamente, el desfase puede ser tan grande, al menos, como lo ha sido durante la primera mitad del siglo.

»Este informe es un paso audaz para enfrentarse con el problema. Está caracterizado por una completa impaciencia ante el actual carácter del sistema educativo. No solamente la mayoría de los profesores serán completamente incapaces de enseñar gran parte de las matemáticas expuestas en el plan propuesto aquí; a la mayoría les costará comprenderlas. Un breve período de reeducación no sería suficiente. Aun el primer grado del plan implica nociones con las cuales el promedio de los profesores no está familiarizado.

»Sin embargo, éstos son los planes hacia los que las escuelas deberían apuntar...»

El segundo de los grupos más recientes que se unió al movimiento para revisar los planes, el Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study, fue organizado en 1965 por el profesor de la Universidad de Columbia, Howard Fehr. Su objetivo era reconstruir las matemáticas de la escuela secundaria «desde un punto de vista global». Se pretendía eliminar las barreras que separan las diversas ramas de las matemáticas y unificar la materia mediante sus conceptos generales, formulaciones, operaciones, aplicaciones, relaciones y estructuras. (Estudiaremos estos conceptos más adelante.) La argumentación del profesor Fehr era que su organización de la materia permitía la introducción en la enseñanza secundaria de buena parte de las matemáticas que hasta entonces se habían considerado exclusi-

vas del *college*. Los trabajos del grupo de Cambridge y del Curriculum Improvement Study han progresado muy lentamente y su efecto en las escuelas no está muy extendido hasta ahora. Por consiguiente, nuestro informe y evaluación de los movimientos a favor de la matemática moderna se concentrarán en los esfuerzos de los grupos precedentes, algunos de los cuales están trabajando aún en uno u otro aspecto de los programas escolares.

Los planes que han sido elaborados por estas organizaciones son el producto de los esfuerzos de grupos en los que han colaborado matemáticos, profesores de *college* y enseñanza secundaria e incluso representantes de la industria. A primera vista tal colaboración parece ser un juicioso proceder. Sin embargo, los intentos por hacer que coincidan las opiniones a menudo acaban en componendas que no son satisfactorias para nadie o que vician la confianza en el esfuerzo. Se puede ilustrar este punto con la anécdota de que la famosa danzarina Isadora Duncan se ofreció a sí misma en matrimonio a Bernard Shaw, y quizá en broma le dijo: «... y piensa en un niño que tuviera tu cerebro y mi físico». «Sí», dijo Shaw, «pero ¿y si el niño tiene tu cerebro y mi físico?»

Cuando se intenta determinar qué cambios ofrecen estos planes, por qué son deseables y qué razones o pruebas se pueden dar para defender la oportunidad de estos cambios, se tropieza con un problema de magnitud considerable. Es verdad que en su informe, en 1959, la Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board describía los cambios que recomendaba. Sin embargo, excepto para acentuar que la sociedad moderna necesita unas matemáticas totalmente nuevas, la comisión no defendía los cambios que proponía. Aún más, los diversos grupos interesados por la reforma que escribieron textos, no solamente extendieron la reforma a los cursos de las escuelas primarias, sino que no siguieron necesariamente las recomendaciones de la comisión. Cabía esperar que cada grupo declarase su postura y presentase su alegato para incluir o excluir temas en particular o para adoptar su propio punto de vista. Esto no se ha producido. Ello es aún aplicable a todos los textos publicados por autores aislados que proclaman su carácter moderno. Así, se deja que deduzcamos por nosotros mismos qué es el plan de matemáticas moderno y por qué es supuestamente superior al plan tradicional. ¿Podría suponerse que la ausencia de explicaciones y justificaciones significa que los partidarios de las matemáticas modernas no tienen muy claro ellos mismos qué es lo que han encabezado, o que temen que una afirmación explícita de las características y los supuestos méritos de sus proyectos no resistiría un examen? En cualquier caso, para determinar la naturaleza y las cualidades de los planes de matemática moderna hay que examinar los textos y escuchar los discursos de los diversos partidarios de la reforma. Por el momento, en espera de una discusión más amplia, permítasenos señalar que hay dos características principales en el nuevo plan: una nueva interpretación de la matemática tradicional y un nuevo contenido.

Puesto que intentamos valorar las nuevas matemáticas es necesario considerar en base a qué se las va a juzgar. Podría usarse como criterio: ¿es la matemática correcta? La respuesta es sí, pero el criterio es inservible. La corrección no garantiza que los estudiantes se aficionen a la asignatura, que puedan comprenderla o que estas matemáticas, en particular, sean las que deberían enseñarse.

¿Se formarán con ellas matemáticos? Aunque éste fuese el plan ideal para formar matemáticos, esto no sería suficiente. Las nuevas matemáticas se enseñan a alumnos de enseñanza primaria y secundaria que escogerán las más diversas profesiones, trabajos, empleos técnicos y salidas o se convertirán ante todo en esposas y madres. De los niños de la escuela primaria, ni un uno por mil serán matemáticos; y en cuanto a los estudiantes que cursan enseñanza secundaria, ni uno de cada cien llegará a serlo. Entonces está claro que un plan que pudiera ser ideal para la formación de matemáticos podría no ser el correcto para estos niveles de enseñanza.

Su contenido debería contribuir a alcanzar los objetivos de la enseñanza primaria y secundaria y ser accesible a los jóvenes. Su enfoque debería hacer el contenido atractivo y

ayudar en lo posible a su comprensión. En particular, las nuevas matemáticas deberían remediar, al menos en parte, algunos de los defectos del plan tradicional. Desgraciadamente, en el campo de la educación, a diferencia de las matemáticas propiamente dichas, no es posible dar una demostración irrebatible de que un determinado principio o tema es correcto o falso. Pero hay argumentos que nos permiten decidir.

Aunque más de una docena de grupos han elaborado nuevos planes y, por ahora, muchos textos de nuevas matemáticas están en el mercado, ya hemos señalado que todos optaban aproximadamente por el mismo enfoque y contenían los mismos temas. Esta uniformidad es consecuencia, en parte, de la imitación. También es una consecuencia de las preferencias y la orientación de los matemáticos en la investigación actual, que estudiaremos ampliamente más adelante. Así pues, aunque no toda afirmación que hagamos acerca de las nuevas matemáticas se aplique necesariamente a cada uno de los planes, es justo tratarlos como movimientos aislados caracterizados por líneas y programas comunes.

Nuestro propósito es considerar cuidadosamente la naturaleza de los programas de las nuevas matemáticas y analizar sus ventajas e inconvenientes. Antes de hacer esto, nos gustaría intercalar una crítica diferente, pero no obstante adecuada. La reforma de la enseñanza de las matemáticas era necesaria, pero la cuestión es si el plan era el componente más débil y si debería haber sido atacado en primer lugar. Todo el mundo admite, creo, que la política de enseñanza general proseguida en Estados Unidos es muy loable, pero nuestro país no estaba ni está aún preparado para llevar adelante tal programa. Lo cierto es que no tenemos bastantes profesores cualificados; por tanto, la educación en muchas partes de esta nación es lamentablemente floja. Si hubiera habido mejores profesores, éstos habrían sido capaces desde hace tiempo, actuando de acuerdo, de remediar los defectos del plan tradicional. Puesto que el profesor es al menos tan importante como el plan, el dinero, el tiempo y la energía dedicados a la reforma del plan muy bien podían haberse dedicado al perfeccionamiento de los profesores. Es verdad que en 1958 la National Science Foundation inauguró varios institutos para la formación de profesores que han proseguido esta labor. Estos institutos debían haber sido utilizados para mejorar los conocimientos matemáticos de los profesores de enseñanza primaria y secundaria, que hubieran podido formar juicios independientes sobre qué es lo más importante en matemáticas. Desgraciadamente, han sido utilizados en gran medida para enseñar a los profesores cómo enseñar matemáticas sin haber probado antes si éstas valían la pena.

Tanto si la reforma del plan debería haber recibido prioridad como si no, debemos afrontar el hecho histórico de que el nuevo plan está ahí y se usa ampliamente. Intentemos por tanto evaluarlo.

4. LA INTERPRETACION DEDUCTIVA DE LAS MATEMATICAS

«La misma gran ciencia (las matemáticas) emplea al menos tanto el poder de la imaginación como el poder de las conclusiones lógicas.»

Johann Friedrich Herbart

Una de las críticas fundamentales al plan tradicional es que los alumnos aprendían a hacer las matemáticas maquinalmente, memorizando procedimientos y demostraciones. El argumento de los defensores del plan de matemática moderna es que si la materia se enseñara lógicamente, si se evidenciara el razonamiento en que se apoya cada paso, los alumnos ya no tendrían necesidad de estudiar de memoria. *Comprenderían* las matemáticas. La interpretación lógica es también, en otras palabras, la interpretación pedagógica y la panacea para las dificultades que los estudiantes han tenido para aprender matemáticas.

¿Qué significa exactamente la interpretación lógica? Fundamentalmente es el usado en el plan tradicional para enseñar la geometría en la enseñanza secundaria. Es decir, se comienza por los axiomas y definiciones y se demuestran en forma deductiva las conclusiones, a las que se llama teoremas. Aunque este enfoque ha sido usado en geometría, no ha sido utilizado en la enseñanza de la aritmética, el álgebra y la trigonometría. Por tanto, el mayor cambio en este aspecto del nuevo plan se ha producido en estas asignaturas. Veamos qué supone el planteamiento deductivo de la aritmética y del álgebra [1]. Los ejemplos que examinare-

[1] El lector que esté familiarizado con el planteamiento deductivo puede prescindir de los próximos ejemplos.

mos están tomados de textos típicos de matemática moderna.

En aritmética se presupone habitualmente que sabemos lo que son los números 0, 1, 2, ..., los llamados números naturales. Entonces se introducen los axiomas. Sabemos que 4 más 3 da lo mismo que 3 más 4 o que $3 + 4 = 4 + 3$. Este axioma se escribe con lenguaje simbólico $a+b = b+a$ y se llama axioma *conmutativo*. Es decir, que podemos intercambiar o conmutar el orden en el que sumamos dos números.

Si tenemos que calcular $3 + 4 + 5$, podemos sumar $3 + 4$ y después sumar 5 al resultado, o bien podemos calcular $4 + 5$ y sumar 3 al resultado. Es decir, que podemos asociar primero 3 y 4 y entonces sumar 5 o asociar primero 4 y 5 y sumar el resultado, 9, a 3. Este es el axioma *asociativo* de la suma. En lenguaje simbólico se expresa en la forma $(a+b) + c = a + (b+c)$. Los axiomas conmutativo y asociativo se aplican también a la multiplicación. O sea: $a \times b = b \times a$ y $(a\times b) \times c = a \times (b\times c)$.

Consideremos ahora $3 \times (4+5)$. Esto es igual a 3×9, o sea, 27. También es igual a $3 \times 4 + 3 \times 5$. Es decir, que $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$. Esto corresponde a otro axioma, llamado *distributivo*. Significa que podemos distribuir la multiplicación entre b y c en vez de aplicarla a $b + c$.

Hay otros axiomas. Por ejemplo, la suma y el producto de números naturales es un único número natural. Hay un único número natural, 0, tal que $a + 0 = a$ para todo número natural a, y hay un único número natural, 1, tal que $a \times 1 = a$, para todo número natural a.

Estos axiomas se usan en la aritmética para justificar ciertos pasos. Consideremos la suma de 38 y 3. Esta se hace en la forma siguiente. Por definición de 38,

$$38 + 3 = (30+8) + 3.$$

El axioma asociativo nos dice que

$$(30+8) + 3 = 30 + (8+3).$$

Ahora, por definición de 3,

$$30 + (8+3) = 30 + (8+[2+1]),$$

y por el axioma asociativo de la suma

$$30 + (8+[2+1]) = 30 + ([8+2]+1).$$

Sumando 8 y 2 tenemos

$$30 + ([8+2)+1) = 30 + (10+1).$$

Por el axioma asociativo

$$30 + (10+1) = (30+10) + 1,$$

y puesto que $30 + 10 = 40$ y $40 + 1 = 41$, tenemos finalmente deducido que

$$38 + 3 = 41.$$

Para mostrar cómo se usa el axioma distributivo en la aritmética, consideremos el producto 7×13. Por definición de 13,

$$7 \times 13 = 7 \times (10+3).$$

Ahora el axioma distributivo nos dice que

$$7 \times (10+3) = 7 \times 10 + 7 \times 3.$$

Como $7 \times 10 = 70$ y $7 \times 3 = 21$, hemos deducido que

$$7 \times 13 = 91.$$

Probablemente estos pasos, que emplean el axioma distributivo, dejan más claro cómo se obtiene el 91 que el multiplicar en la forma habitual, diciendo que $7 \times 3 = 21$ escribiendo el 1, llevando el 2 a la columna de las decenas y sumándolo al resultado obtenido de multiplicar 7 y 1.

Es verdad que nuestro método de escribir números tales como el 13 emplea lo que se llama la notación posicional. Es decir, el 1 en el 13 vale 10 y esto debe tenerse en cuenta en cualquier método que enseñe a multiplicar. La cuestión es si la mención del axioma distributivo clarifica la operación. Supongamos que es así y veamos a qué conduce esto. Veamos el problema de multiplicar 17×13. Para seguir el modelo anterior debemos hacer:

$$17 \times 13 = (10+7) \times (10+3).$$

Entonces $10 + 7$ debe mirarse como un número simple, y por el axioma distributivo

$$(10+7) \times (10+3) = [10+7] \times 10 + [10+7] \times 3.$$

Por el axioma conmutativo de la multiplicación

$$[10+7]\times 10+[10+7]\times 3=10\times[10+7]+3\times[10+7],$$

y de nuevo por el axioma distributivo

$$10 \times [10+7] + 3 \times [10+7] =$$
$$= (10\times 10+10\times 7) + (3\times 10+3\times 7).$$

Calculando las cantidades entre paréntesis y sumándolas obtenemos 221. Fácilmente podemos imaginar los pasos que deberíamos dar para multiplicar, por ejemplo, 172 por 135.

En cierta etapa de la exposición de la aritmética y el álgebra, generalmente entre los grados séptimo y noveno, se estudian los números negativos. Para «justificar» la introducción de los números negativos se les pregunta primero a los alumnos ¿qué número x satisface la ecuación $21 + x = 17$? Para responder a esta pregunta se escribe 21 como $17 + 4$, tal que

$$(17+4) + x = 17.$$

Por el axioma asociativo,

$$17 + (4+x) = 17.$$

Pero por definición de 0,

$$17 + 0 = 17,$$

así que, puesto que el cero es único,

$$4 + x = 0.$$

Vemos que si hubiera un número x tal que $x + 4 = 0$, podríamos resolver la ecuación original. Por tanto, tenemos motivos para introducir el número -4, entendiendo que $4 + (-4) = 0$.

A los números naturales (excepto el 0) se les llama ahora enteros positivos, y a los nuevos se les llama enteros negativos. Para operar con los enteros negativos se acepta que los axiomas, o propiedades básicas que se aplicaban a los naturales, ahora se verifican para la combinación de los antiguos números naturales y los nuevos números negativos. Así, puesto que los axiomas asociativo y conmutativo de la suma se cumplen para los números naturales, se verificarán para los enteros positivos y negativos.

Por ejemplo, para sumar -2 y -5 señalamos, primero, que por definición de -2 y -5,

$$(-2+2) + (-5+5) = 0 + 0 = 0.$$

Pero por los axiomas asociativo y conmutativo,

$$(-2+2) + (-5+5) = 2 + 5 + [(-2) + (-5)];$$

así que

$$0 = 7 + [(-2) + (-5)].$$

Por tanto, $-2 + (-5)$ deben ser -7, ya que sumando 7 a dicha expresión da 0.

Una vez que se ha aprendido cómo sumar números negativos y positivos, se dice a los alumnos que restar significa añadir el opuesto. El 4 es el opuesto de -4 y a la inversa. Por tanto,

$$17 - 13 = 17 + (-13) = 4;$$
$$6 - 8 = 6 + (-8) = -2;$$
$$-5 - (-11) = -5 + 11 = 6.$$

Antes de establecer más propiedades de los números negativos, vamos a probar que $a \times 0 = 0$, para todo entero a. Puesto que por definición de 0, $a + 0 = a$, entonces

$$a \times (a+0) = a \times a.$$

Sin embargo, por el axioma distributivo,

$$a \times (a+0) = a \times a + a \times 0.$$

Entonces

$$a \times a + a \times 0 = a \times a.$$

Por tanto,

$$a \times 0 = 0,$$

puesto que 0 es un número tal que sumado con cualquier número b, da b.

Ahora se supone que los alumnos están preparados para entender la demostración de que el producto de un entero negativo por un positivo es un negativo. Es decir, que $-3 \times 4 = -12$. Comenzamos con

$$a \times [b+(-b)] = a \times 0 = 0, \tag{1}$$

ya que $b + (-b) = 0$. Sin embargo, por el axioma distributivo,

$$a \times [b+(-b)] = a \times b + a \times (-b). \tag{2}$$

Entonces los segundos miembros de (1) y (2) son iguales, luego

$$a \times b + a \times (-b) = 0.$$

Por tanto, $a \times (-b)$ debe ser $-(a \times b)$, ya que $a \times (-b)$ sumado con $a \times b$ da 0 y esto sólo se cumple para el opuesto de $a \times b$, es decir, $-(a \times b)$.

Finalmente, si en vez de (1) partimos de

$$-a \times [b+(-b)],$$

y repetimos los mismos pasos sin más que cambiar $-a$ por a, podemos demostrar que

$$-a \times -b = a \times b.$$

A menudo se usa otro método para introducir los números enteros (positivos y negativos). Se comienza con los números 1, 2, 3, 4, ...; éstos son los números naturales, excepto el 0. Entonces los enteros se definen como las clases de equivalencia de los pares ordenados de números naturales. Lo que significa lo siguiente. Un par ordenado de números naturales es el par $(7, 5)$. Esto intuitivamente significa $7 - 5$. Sin embargo, $(6, 4)$, $(4, 2)$, $(8, 6)$ y millones de otros pares representan el mismo entero. Dos de estos pares, (a, b) y (c, d), se llaman equivalentes si $a + d = b + c$. Entonces, el entero 2 es la clase de todos los pares equivalentes, por ejemplo, al par $(7, 5)$. El mérito de esta definición es que permite introducir el par ordenado $(5, 7)$, que intuitivamente representa $5 - 7$ ó -2, utilizando tan sólo los números naturales. $(5, 7)$, $(4, 6)$, $(6, 8)$ y los demás pares de esta forma son también el mismo entero negativo -2. El entero que generalmente llamaremos 0 es la clase de los pares ordenados $(5, 5)$, $(6, 6)$, $(7, 7)$, etc. Con el método anterior creábamos los números negativos; con éste los «construimos».

Las operaciones con enteros positivos y negativos se definen, según este planteamiento, en términos de pares ordenados. Así que la suma de $(7, 5)$ y $(6, 3)$ es $(13, 8)$. Intuitivamente sabemos que $2 + 3 = 5$, pero el desarrollo lógico exige hacer lo anterior. Más en general, $(a, b) + (c, d) =$

$= (a + c,\ b + d)$. Vemos que la definición de suma sirve igualmente para los negativos. Así, $(5, 7) + (3, 6) = (8, 13)$ o, intuitivamente, $-2 + -3 = -5$. La definición de los enteros mediante pares ordenados puede usarse para introducir la resta, la multiplicación y la división, y se obtienen milagrosamente las leyes habituales con que se manejan los números enteros.

Para la introducción de las fracciones se sigue un planteamiento similar al utilizado para los números enteros negativos. Se pregunta al alumno cómo encontraría el valor de x para el que $3x = 6$. Es claro que $x = (1/3) \times 6$ ó $6/3$. Entonces se le pregunta cómo calcularía x cuando $3x = 7$. Ningún entero satisface esta ecuación. Creamos entonces unos nuevos números, las fracciones. En particular, para este x creamos el número $7/3$, que significa $(1/3) \times 7$, y acordamos que $3 \times 1/3 = 1$. Una vez introducidas las fracciones, acordamos verificar los axiomas asociativo, conmutativo y distributivo. Podemos demostrar entonces que se cumplen las operaciones habituales para la suma, resta, multiplicación y división de fracciones.

Algunos textos también introducen las fracciones como pares ordenados de enteros. Así, $(3, 5)$ es la fracción que intuitivamente significa $3/5$. Las operaciones se definen con respecto a los pares ordenados y entonces se puede probar que la suma y la multiplicación son asociativas, conmutativas y distributivas.

El planteamiento deductivo encuentra un serio obstáculo, al menos a nivel elemental, al tratar los números irracionales. El lector debe recordar que números tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ y otros parecidos también pertenecen al sistema de numeración. Para los principiantes es mucho más difícil entender un tratamiento enteramente lógico de estos números, y aunque los alumnos pudiesen asimilarlo, el tiempo necesario sería desmesurado. Entonces los textos, habitualmente, aceptan un convenio. Justifican la introducción de tales números, en primer lugar, mostrando que para resolver

$$x^2 = 4$$

tomamos la raíz cuadrada en ambos lados de igualdad y obtenemos

$$x = \pm 2.$$

Similarmente, para resolver

$$x^2 = 2$$

se toma la raíz cuadrada en ambos lados y se obtiene

$$x = \pm \sqrt{2}.$$

Así es como se introducen los números irracionales. Se puede probar, y muchos textos lo hacen así, que $\sqrt{2}$ no es racional; es decir, que no es igual al cociente de dos enteros. Está claro que objetos tales como $\sqrt{2}$ son una nueva clase de números. Sin embargo, esta «justificación» no basta para introducir todos los números irracionales, en particular el número π. Tampoco proporciona una base lógica para construir las propiedades de los números irracionales. En consecuencia, estas propiedades deben postularse. Por ejemplo, se cumple que, si a y b son mayores que cero, $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Pero puesto que no puede probarse esto a nivel elemental, los textos se limitan a afirmarlo y darle un nombre. Se le llama propiedad del producto de las raíces cuadradas. Análogamente, no se puede probar que $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$, y así simplemente se afirma que esto se cumple y se designa como propiedad del cociente de las raíces cuadradas.

Otras dificultades surgen en la introducción de los números complejos, es decir, de los números de la forma $3 + \sqrt{-1}$, $2\sqrt{-2}$, etc. En este caso, el nuevo plan, como el antiguo, inventa $\sqrt{-1}$ como solución a la ecuación $x^2 = -1$ y forma entonces los números complejos. Por otra parte, se introducen los números complejos como pares ordenados de números reales. Entonces se definen las operaciones aritméticas entre números complejos y se demuestra que las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva se cumplen con estas operaciones.

Los fundamentos lógicos de la aritmética nos sirven ahora para construir el álgebra. El álgebra se distingue de la aritmética en que trabaja con expresiones que incluyen letras, como $3x^2 + 5x + 2$, y opera con tales expresiones Puesto que las letras sustituyen a números y todos los números obedecen las mismas leyes, las letras obedecen a estas leyes. Consideremos una demostración algebraica. Demostraremos que si $a \times b = 0$, entonces o bien a es 0, ó b es 0, o ambos son cero.

Si $a = 0$, el teorema está demostrado. Si a no es igual a cero, hay una propiedad del sistema de números que nos dice que existe un inverso $1/a$. Entonces, como $a \times b = 0$ y cualquier número multiplicado por 0 da 0,

$$\frac{1}{a} \times (a \times b) = \frac{1}{a} \times 0 = 0.$$

Por el axioma asociativo de la multiplicación,

$$\left(\frac{1}{a} \times a\right) \times b = 0.$$

Pero como $(1/a) \times a = 1$, $1 \times b = 0$; y ya que $1 \times b = b$,

$$b = 0.$$

Queda así probado el teorema.

Algunos de los autores de libros de texto quieren hacer más fácil el desarrollo lógico del sistema de números o «innovarlo». Los autores de los textos más usados, al introducir los números negativos, dan una lista de muchas de las propiedades habituales: la suma de dos enteros cualesquiera es un entero, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva y alguna tan peculiar como la propiedad del opuesto de una suma: $-(a+b) = -a + (-b)$. Se dan ejemplos del uso de estas propiedades y se pide a los alumnos que los repitan. Por último se enumeran unas treinta o cuarenta propiedades y se supone que los alumnos deben aprenderlas y aplicarlas. Los autores no dicen si estas propiedades son axiomas ni demuestran sus enunciados. El resultado es la confusión entre lo que se demuestra a partir de los axiomas y lo que son reglas. Los autores, en efecto, están repitiendo reglas mientras afirman que están enseñando matemáticas deductivas.

Los ejemplos que hemos utilizado para mostrar cómo se aplica la deducción al álgebra y la aritmética han sido muy sencillos. Se puede imaginar fácilmente lo largas y complicadas que son las demostraciones cuando el álgebra y la aritmética se hacen más complejas.

La interpretación deductiva de la geometría euclídea es fundamentalmente aquella que se enseñaba antes en la enseñanza secundaria. Por tanto, no es necesario exponerla aquí. Sin embargo, en el capítulo siguiente tendremos que decir algo más acerca de las demostraciones en la geometría.

Puesto que la mayor innovación de las nuevas matemáticas es la interpretación deductiva de los temas estudiados en el plan tradicional, tratemos de determinar qué méritos pedagógicos puede tener esta interpretación. En particular, ¿lleva a comprender las matemáticas?

Varias consideraciones nos obligan a responder esta pregunta negativamente. Veamos, en primer lugar, cómo se han desarrollado las mismas matemáticas y si su historia nos proporciona argumentos a favor de una u otra respuesta. Las matemáticas han sido creadas, después de todo, por seres humanos que indudablemente las comprendían. ¿Cómo llegaron los maestros Euclides, Arquímedes, Newton, Euler y Gauss a comprender las matemáticas?

Las matemáticas en sentido estricto se inician con las contribuciones de los egipcios y babilonios durante un período aproximado que va desde el año 3000 al 300 a. de J. C. Estos dos pueblos crearon los rudimentos de la aritmética, el álgebra y la geometría. En aritmética trabajaban siempre con números y fracciones positivas. Desconocían los números negativos e incluso no introdujeron el cero, pese a que los babilonios usaban una notación posicional en base sesenta para escribir grandes números. Es decir, que, en su simbolismo, un número tal como 125 significa

$1 \times (60)^2 + 2 \times 60 + 5$, así como en nuestra base diez 125 significa $1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5$. Tal sistema de escritura exige casi el cero, ya que para escribir 105 se necesita el 0 para indicar que el 1 no está en la posición de las «decenas», sino en la de las «centenas». Los babilonios, sin embargo, no crearon el cero. Sus números fueron ambiguos y se tiene que juzgar su significado por el contexto.

Todo lo que los egipcios y babilonios podían manejar en geometría eran las fórmulas del perímetro, el área y el volumen de las figuras geométricas más simples. Para cualquier figura que presentaba dificultades, tales como la longitud o el área del círculo, las fórmulas eran sólo aproximaciones. Así que durante casi tres mil años, dos civilizaciones bastante desarrolladas en campos tales como el arte, la religión, el comercio, la astronomía y la arquitectura, no llegaron en las matemáticas si no a los rudimentos. Más aún, aceptaron todos sus resultados sobre una base puramente empírica. No desarrollaron siquiera el concepto de demostración deductiva. ¿Habrían podido tener estas civilizaciones un conocimiento más amplio de las matemáticas? Indudablemente. Todo lo que podemos decir es que la mente humana no comprende fácilmente las matemáticas más sofisticadas. De hecho, incluso los escasos resultados de los egipcios y de los babilonios superan lo conseguido en el terreno de las matemáticas por cientos de civilizaciones que tuvieron las mismas oportunidades y necesidades que ellos.

La primera civilización en la que se puede decir que florecieron las matemáticas fue la de la Grecia clásica; esta civilización alcanzó su cenit entre los años 600 y 300 a. de J. C. Está claro que los griegos tuvieron una mentalidad de alcance sorprendente, incluso asombroso. Los pensadores clásicos griegos fueron indiferentes generalmente a las necesidades del comercio, la navegación y las cuestiones prácticas, pero se dedicaron intensamente a la comprensión de la naturaleza. La geometría resultaba especialmente adecuada para ello, y es en esta área donde hicieron sus máximas contribuciones. Los griegos fueron también quienes primero concibieron la matemática deductiva. Su objetivo era obtener conocimientos verdaderos acerca de la naturaleza, y

su plan, comenzar con algunas verdades evidentes por sí mismas, tales como que dos puntos determinan una recta y que todos los ángulos rectos son iguales. Dadas estas verdades, o axiomas, planearon obtener deductivamente conclusiones o teoremas. Los teoremas también serían entonces verdaderos.

Erigieron varias estructuras magistrales, la principal de las cuales es la de los *Elementos* de Euclides, que constituye básicamente el curso de geometría de la enseñanza secundaria tradicional. Sin embargo, la geometría euclídea no apareció en forma deductiva. Hicieron falta trescientos años, el período que va de Tales a Euclides, de exploraciones, titubeos, argumentos vagos e incluso incorrectos, antes de que se plasmaran los *Elementos*. Por tanto, los *Elementos* constituyen el resultado final y relativamente sofisticado de un pensamiento más tosco e intuitivo. Incluso esta estructura, que intenta ser estrictamente lógica, se apoya demasiado sobre argumentos intuitivos, definiciones injustificadas e incluso carentes de significado y demostraciones inadecuadas, como comprendieron los matemáticos del siglo XIX. Lo que es más importante, sin embargo, es que este sistema deductivo aparece después de que se ha logrado comprender todo su contenido. Más aún: no es un accidente que fuese la geometría euclídea el primer tema que recibió un desarrollo lógico extensivo; la razón para ello es que la intuición puede aplicarse inmediatamente para inferir cuestiones geométricas y que las mismas figuras sugieren métodos de demostración.

También es importante el que los números irracionales, tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ y otros, no fuesen aceptados como números durante un largo período de cultura griega. ¿Por qué no? Porque todos los números y fracciones tenían un claro sentido físico del que los irracionales carecen. El único sentido intuitivo que se podía dar a los irracionales era el de representar ciertas longitudes geométricas, tales como la diagonal de un cuadrado de lado 1. ¿Qué hicieron entonces los griegos? Rechazaron los irracionales como números y pensaron en ellos como longitudes. De hecho, convirtieron toda el álgebra en geometría para poder trabajar con longitudes, áreas y volúmenes, que podían, por otro lado, ser representados numéricamente con números irracionales; incluso resolvieron las ecuaciones cuadráticas geométricamente.

La historia de las matemáticas tras el período superior de la cultura griega es lo más opuesto a la forma en que se conciben ordinariamente las matemáticas. El progreso en el uso de los números irracionales se debió a la civilización griega de Alejandría, que fue una fusión de las civilizaciones de la Grecia clásica, Egipto y Babilonia, y a los árabes e hindúes, cuyos planteamientos eran totalmente empíricos. Fueron los hindúes quienes decidieron que $\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$, y su razonamiento fue que con los irracionales podía «calcularse como con los enteros», es decir, como con $\sqrt{4}\,\sqrt{9} = \sqrt{36}$. Puesto que esta última expresión es obviamente correcta, como se puede ver tomando las raíces cuadradas de cada número, igual sucede con $\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$. Los números irracionales fueron gradualmente aceptados a causa de su utilidad y porque la familiaridad elimina la crítica.

Los números negativos, introducidos por la pragmática mentalidad hindú alrededor de 600 años d. de J. C., no tuvieron aceptación durante mil años. Razón: la falta de una base intuitiva. Algunos de los matemáticos más grandes, como Cardan, Vieta, Descartes y Fermat, se negaron a trabajar con números negativos. La historia de los números complejos es similar, aunque no aparecieron hasta 1540 d. de J. C., aproximadamente, y aunque sólo transcurrieron unos doscientos años hasta que su uso se normalizó. Es interesante citar una observación del eminente matemático Carl Friedrich Gauss. Como es bien sabido, fue uno de los descubridores de la representación geométrica de los números complejos, y acerca de ella dijo en 1831: «Aquí [en esta representación] la demostración del significado intuitivo de $\sqrt{-1}$ está completamente razonada y no se necesita más para admitir esta cantidad en el dominio de la aritmética.» Ni Descartes, ni Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss o Cauchy podrían haber dado una definición de número negativo, complejo o irracional. Sin embargo, todos ellos manejaron estos números muy satisfactoriamente en su trabajo, al menos en relación con el uso que de ellos se hacía en su tiempo. La historia de todo el sistema numérico no sólo es pertinente por mostrar cómo se ha desarrollado, sino también porque el álgebra y el análisis (el cálculo infinitesimal y sus ramas más complicadas) utilizan obviamente el sistema numérico, e independientemente de la base sobre la que éste se apoye, debe servir de base al álgebra y al análisis.

En la historia del álgebra hay otra anécdota significativa. El uso de una letra para representar un número fijo pero desconocido proviene de los griegos. Sin embargo, el uso de una o varias letras para representar toda una clase de números no se concibió hasta finales del siglo XVI. François Vieta introdujo entonces expresiones como $ax + b$, donde a y b podían ser cualquier número (real)[2]. El interés mayor de tales expresiones generales es que lo que podemos demostrar acerca de ellas se cumple para todos los valores de a, b y x. Así que si aprendemos a resolver la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, podemos resolver todas las ecuaciones cuadráticas, porque a, b y c pueden representar cualquier número. El uso de letras para representar cualquier número o incluso una clase restringida de números es entonces, verdaderamente, una enorme contribución y aparentemente simple una vez que se ha obtenido. Sin embargo, durante todos los siglos en que los babilonios, egipcios, alejandrinos, griegos, hindúes y árabes trabajaron en álgebra, no se les ocurrió la idea de usar letras por clases de números. Estos pueblos hicieron su álgebra trabajando con expresiones concretas como $3x^2 + 5x + 6 = 0$. Es decir, que siempre usaron coeficientes numéricos, e incluso, de hecho, en su mayor parte no usaron un símbolo como la x para la incógnita. Usaron palabras.

¿Por qué se retrasó el uso de las letras como coeficientes, en general, durante tanto tiempo? La respuesta podría ser que este recurso es parte de un nivel más alto de abs-

---

2 Vieta no admitía en realidad valores negativos para a, b y x.

tracción en matemáticas, un nivel mayor, que suprime la intuición. Es más difícil pensar acerca de $ax^2 + bx + c = 0$ que acerca de $3x^2 + 5x + 6 = 0$. Sin embargo, sólo después de que se introdujeron estos coeficientes generales fue posible razonar deductivamente acerca de los procedimientos algebraicos para expresiones generales significativas.

La historia del cálculo infinitesimal es igualmente instructiva. No entraremos en los detalles de los conceptos que están relacionados con los fundamentos de esta materia. Pero puede bastar con señalar unos pocos hechos acerca de su desarrollo. Los grandes nombres en la creación del cálculo infinitesimal son, naturalmente, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. Sin embargo, Descartes, Fermat, Cavalieri, Pascal, Roverbal, Barrow y al menos una docena más de conocidos matemáticos hicieron contribuciones significativas antes que ellos. A pesar de que tanto se hubiese hecho antes de que ellos desarrollaran su trabajo, ni Newton ni Leibniz pudieron formular correctamente los conceptos básicos del cálculo infinitesimal. Newton escribió tres importantes artículos sobre cálculo infinitesimal y publicó tres ediciones de su obra maestra *Los principios matemáticos de la filosofía natural*. En cada uno de estos textos dio una explicación diferente del concepto básico, que llamamos derivada. Actualmente, ningún principiante en el cálculo infinitesimal aceptaría ninguna de ellas. Leibniz fue igualmente desafortunado en muchos de sus artículos. Su primer artículo fue descrito por los famosos hermanos Bernoulli, James y John, como «un enigma más que una explicación».

Tanto los trabajos de Newton como los de Leibniz recibieron muchos ataques. Newton no respondió, pero Leibniz sí lo hizo. Se opuso a las «críticas puntillosas», y sostuvo que no debíamos permitir que un exceso de escrúpulos nos llevara a rechazar los frutos de la inventiva. Sin embargo, los defectos estaban allí y los ataques continuaron durante todo el siglo XVIII. Eran tan grandes las dificultades para clarificar los conceptos básicos del cálculo, que el famoso matemático del siglo XVIII Jean LeRond d'Alembert tuvo

que advertir a los estudiantes: «Insistid y la fe vendrá a vosotros.»

Cabía esperar que el cálculo entraría en crisis, en vista de lo incierta, falta de claridad e incluso incorrecta que era su fundamentación. Pero antes de que se crease la adecuada estructura deductiva, no solamente se había extendido y aplicado con éxito el cálculo, sino que se habían desarrollado, sobre la base del cálculo, temas tan amplios como las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, el cálculo de variaciones, la geometría diferencial y la teoría de funciones de variable compleja. ¿Cómo lograron los matemáticos estos enormes avances? Está claro que pensaron intuitivamente. Los argumentos físicos, los dibujos, las generalizaciones apoyadas en casos sencillos conocidos y la experiencia matemática contribuyeron a llegar a conclusiones correctas.

Es muy significativo que los fundamentos lógicos del sistema numérico, el álgebra y el análisis (el cálculo y sus ampliaciones) no fuesen desarrollados hasta finales del siglo XIX. En otras palabras, durante los siglos en los que se edificaron las ramas más importantes de las matemáticas no había un desarrollo lógico para la mayor parte de ellas. Aparentemente la intuición de los grandes hombres es más poderosa que su lógica.

¿Qué podemos deducir de esta historia? Parece claro que primeramente se aceptaron y utilizaron los conceptos que tenían mayor significado intuitivo: todos los números, las fracciones y los conceptos geométricos. Los menos intuitivos, los números irracionales, los números negativos, los números complejos, el uso de letras como coeficientes generales y los conceptos del cálculo, necesitaron de muchos siglos para su creación o para su aceptación. Además, cuando fueron aceptados no fue la lógica la que indujo a ello a los matemáticos, sino los argumentos por analogía, el significado físico de algunos conceptos y la obtención de resultados científicos correctos. En otras palabras, fue la evidencia intuitiva lo que indujo a los matemáticos a aceptarlos. La lógica siempre ha venido mucho después de la invención, y, evidentemente, ha sido más difícil de alcanzar.

Así pues, la historia de la matemática sugiere, aunque no lo pruebe, que es más difícil el planteamiento lógico.

Se podría encontrar otro argumento contra la interpretación deductiva en la evidencia histórica. Este argumento, esencialmente, es el de que cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado. Este argumento ha sido anticipado por muchos grandes matemáticos relacionados con la pedagogía. Henri Poincaré, uno de los más grandes matemáticos de los últimos tiempos, dijo en sus *Fundamentos de la ciencia:* «Los zoólogos mantienen que el desarrollo del embrión de un animal reproduce en un breve período la historia de sus antepasados a lo largo de las épocas geológicas. Parece que sucede lo mismo en el desarrollo de la mente. La tarea del educador es hacer que la mente de un niño pase por las experiencias que han tenido sus padres, pasando rápidamente por ciertas etapas, pero sin omitir ninguna. La historia de la ciencia debe guiarnos en este propósito.»

El mismo pensamiento ha sido expresado por uno de los más importantes matemáticos y profesores de finales del siglo XIX y comienzos del XX. Félix Klein, en sus *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, dice: «Al acabar esta discusión de la teoría de colecciones (conjuntos), debemos hacer de nuevo la pregunta que acompaña a todas estas lecciones: "¿qué es lo que se puede usar de todo esto en la enseñanza?". Desde el punto de vista de la pedagogía matemática, debemos naturalmente protestar contra la imposición a los alumnos de cosas tan abstractas y difíciles demasiado pronto. Para aclarar mi propio punto de vista, desearía recordar la ley fundamental de la biogenética, según la cual el desarrollo de los individuos reproduce en una serie resumida todas las etapas del desarrollo de las especies. Esto es algo que hoy día sabe todo el mundo. Pues bien, pienso que la enseñanza de las matemáticas, como la de cualquier otra cosa, sigue esta ley, por lo menos a grandes rasgos. Teniendo en cuenta la capacidad natural de los jóvenes, se les debe llevar lentamente hacia las ideas

más elevadas y, finalmente, a las formulaciones abstractas, siguiendo al hacer esto el mismo camino a lo largo del cual la raza humana ha salido de su sencillez original para llegar a las formas más elevadas del conocimiento. Es necesario recordar frecuentemente este principio, ya que siempre hay quienes, al estilo de la escolástica medieval, comienzan la enseñanza con las ideas más generales, defendiendo este método como "el único científico". Y, sin embargo, esta justificación es todo menos cierta. Enseñar científicamente sólo quiere decir inducir a pensar científicamente, de ningún modo enfrentar al alumno, desde el principio, con fríos sistemas científicamente pulidos.

»Un obstáculo esencial para la difusión de tal método, natural y verdaderamente científico, es la falta de conocimientos históricos que tan a menudo se hace notar. Para combatir esto, he intentado que el texto incluya notas históricas. Al hacerlo confío haber puesto de relieve con qué lentitud se han producido todas las ideas matemáticas; cómo casi siempre han aparecido primero en esbozo y sólo han cristalizado después de largo tiempo en la forma definitiva que resulta familiar en la exposición sistemática.»

No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes y no puede tener éxito ningún intento de acabar con estas dificultades a base de palabrería lógica. Si los matemáticos necesitaron un millar de años desde que aparecieron las primeras matemáticas hasta que llegaron al concepto de número negativo —y esto es lo que sucedió—, y si fueron necesarios otros mil años para que los matemáticos aceptaran los números negativos —como así fue—, podemos estar seguros que los estudiantes tendrán dificultades con los números negativos. Además, los estudiantes tendrán que superar estas dificultades aproximadamente en la misma forma en que lo hicieron los matemáticos, acostumbrándose gradualmente a los nuevos conceptos, trabajando con ellos y sacando partido de todo apoyo intuitivo que el profesor pueda darles. Naturalmente, se puede argumentar que, aun si el crecimiento de las matemáticas ha seguido el camino descrito, nosotros tenemos ahora las estructuras lógicas necesarias para el sistema numérico, el cálculo, etc., y no necesitamos pedir a los estudiantes que repitan las especulaciones de los maestros. Podemos ofrecer a los estudiantes los planteamientos correctos y ellos los entenderán. Este argumento puede ser contrarrestado por el hecho de que los más importantes matemáticos trataron de construir los fundamentos lógicos de estas materias, pero fracasaron durante siglos. Su fracaso demostraría que las interpretaciones lógicas no son fáciles de captar. Se puede comprimir la historia y evitar muchos de los esfuerzos y trampas inútiles, pero no es posible darla de lado. Pero, naturalmente, nuestros estudiantes pueden ser superiores a los mejores matemáticos del pasado.

Pero no insistiremos más en la evidencia histórica. Hay otros argumentos más fuertes contra una interpretación puramente deductiva de las matemáticas elementales.

Debemos notar, antes de nada, que existe ya una experiencia en la presentación deductiva de las matemáticas. La geometría euclídea ha sido expuesta de esta manera durante siglos. Además, su significado intuitivo es también evidente para el estudiante. Sin embargo, los estudiantes no han tenido más éxito en dominar la geometría que el álgebra; ni han dejado el curso de geometría con un sentimiento de alegría por haber comprendido al fin una rama de las matemáticas. Entonces, si la evidencia histórica no es suficiente, debe haber otros argumentos pedagógicos contra la interpretación lógica. No son difíciles de encontrar.

Hacia la mitad del siglo XIX se establecieron los diversos tipos de números y sus propiedades *sobre la base del uso que se hacía de ellos*. Asimismo, las propiedades de las funciones, derivadas e integrales, usadas en el cálculo se aceptaron sobre la base de que parecían evidentes para las funciones más simples o sobre la base de la verdad física de los resultados obtenidos. Los matemáticos se ocuparon entonces de la construcción lógica de los fundamentos de las propiedades que habían empleado. De hecho, la lógica tenía que *justificar* aquellas propiedades, antes que determinarlas. Así es como se edificó una estructura muy artificial y complicada de axiomas y teoremas. El propósito de esta estructura era satisfacer las necesidades de los matemáticos profesionales, que insistían en la estructura deductiva, pero nunca se pensó utilizarla para una interpretación pedagógica. Sin embargo, son estos fundamentos lógicos los que la nueva matemática emplea para educar el entendimiento.

El hecho de que la utilidad determina la interpretación lógica, y no al contrario, es tan básico en matemáticas que merece que hagamos hincapié en él. Veamos un ejemplo. Para sumar fracciones, en la mayor parte de los casos, por ejemplo, para sumar 1/2 y 1/3, las reducimos al mínimo común denominador y sumamos 3/6 y 2/6, obteniendo 5/6. Sin embargo, cuando multiplicamos fracciones, multiplicamos los numeradores y los denominadores, es decir, $1/2 \times 1/3 = 1/6$. Podríamos «sumar» las fracciones sumando los numeradores y los denominadores y obtener $1/2 + 1/3 = 2/5$. ¿Por qué no usamos este último método? Sería más simple, pero no se ajustaría a la experiencia. Cuando hemos adoptado una definición útil de la suma, las propiedades lógicas de ésta deben deducirse de la definición.

Otro ejemplo puede ser la multiplicación de matrices. Para el uso de las matrices se requiere que la multiplicación sea no-conmutativa, aunque podríamos definir una multiplicación que fuera conmutativa. Desde el momento en que la multiplicación debe ser no-conmutativa, los fundamentos lógicos de la teoría de matrices deben adaptarse a este hecho. Por tanto, la lógica no dicta cuáles son los contenidos de la matemática; el uso es lo que determina la estructura lógica. La organización lógica aparece *a posteriori*, y en cierto sentido es tan sólo un adorno [3].

De hecho, si un estudiante es realmente inteligente y se le pide que emplee el axioma conmutativo para, por ejemplo, justificar que $3 \times 4 = 4 \times 3$, puede muy bien preguntar ¿por qué se cumple el axioma conmutativo? La verdadera respuesta es, naturalmente, que nosotros aceptamos el axioma conmutativo porque nuestra experiencia con grupos de objetos nos dice que $3 \times 4 = 4 \times 3$. En otras palabras,

[3] Véase la definición de matriz en el capítulo 8.

el axioma conmutativo es correcto porque $4 \times 3 = 3 \times 4$ y no hay que darle más vueltas. El estudiante normal repetirá como un papagayo las palabras «axioma conmutativo» y querrá, como Pascal lo expresó en sus *Cartas provincianas*, «fijar estos términos en la memoria porque no significan nada para la inteligencia».

Repitamos que es preciso conocer la finalidad de la matemática para poder edificar sus fundamentos lógicos. Poincaré señalaba que existen varias formas de construir el sistema numérico a partir de los números positivos. ¿Por qué aceptamos una y no otra? «La elección se guía por la consideración de la noción intuitiva dentro de la cual esta construcción ocupa un lugar; sin esta consideración, la elección aparece injustificada. Pero para comprender una teoría no es suficiente con mostrar que el camino elegido no presenta obstáculos, es necesario tener en cuenta las razones por las que se toma ese camino. ¿Es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa, sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esta forma? No, realmente no es posible entenderla; incluso resulta imposible retenerla si no es de memoria.»

Las consideraciones de Poincaré pueden aplicarse al juego del ajedrez. Para jugarlo no basta con saber las reglas para mover las piezas. Con este conocimiento únicamente se puede saber si un movimiento es correcto, pero no se puede entender si un movimiento es mejor que otro. Las razones o estrategias internas no son evidentes. En el caso de la matemática, la razón interna es su uso.

En realidad, la interpretación lógica induce a error. Al extender el sistema numérico desde los números naturales a los otros tipos de números, se insiste en el nuevo plan en la conservación de las propiedades asociativa y conmutativa de las operaciones. ¿Por qué insistir en esas propiedades? Los profesores saben que el uso de los números necesita de ellas, pero los estudiantes adquieren la idea de que son propiedades necesarias a todas las cantidades matemáticas. ¿Por qué, entonces, no extendemos la propiedad conmutativa a la multiplicación de matrices? La respuesta

es que el uso al que se destinan las matrices exige la multiplicación no conmutativa. La interpretación lógica da a los estudiantes una impresión enteramente falsa sobre la forma en que se desarrollan las matemáticas.

La mayor parte de las demostraciones que se enseñan a los estudiantes también son artificiales por otras razones. Cuando un matemático pretende demostrar un teorema que le parece correcto, utiliza para la demostración todos los medios, por más que sean pesados, indirectos o tortuosos, pero quizá más naturales en el proceso creativo. Una vez que el teorema ha sido demostrado, sabiendo cómo puede superarse la dificultad esencial, el matemático o sus sucesores pueden idear por lo general una demostración más fácil o más directa. Algunos teoremas han sido demostrados varias veces, y cada una de las sucesivas demostraciones remodela y simplifica la anterior, incluyendo a menudo generalizaciones y resultados más fuertes. Así que el teorema final y su demostración se alejan de los iniciales planteamientos naturales. Cabe esperar, entonces, que los estudiantes, al enfrentarse a un resultado tan trabajado y limado, y posiblemente más complejo, no puedan captarlo. Además de intentar rehacer una demostración para aumentar su brevedad y quizá su elegancia, a los matemáticos les gusta erigir estructuras lógicas en las que se deducen muchos teoremas a partir de un pequeño número de axiomas. El ajustar un teorema dentro de una estructura semejante puede exigir complicaciones adicionales en la demostración y producir aún más dificultades a los estudiantes que pretenden comprenderlo.

Muchos profesores salen de sus clases muy satisfechos consigo mismos después de haber expuesto una serie de semejantes teoremas y demostraciones. Pero los estudiantes no quedan satisfechos. No han comprendido de qué iba, y todo lo que pueden hacer es aprender de memoria lo que han oído. No conocían el pensamiento original y no han sacado nada en limpio de las repulidas demostraciones. La interpretación deductiva ha sido comparada a un zorro que borra sus huellas con la cola.

El hincapié en la interpretación lógica engaña también al estudiante en otro sentido. Le hace creer que las matemáticas han sido creadas por genios que comenzaban con axiomas y razonaban directamente desde los axiomas hasta los teoremas. El estudiante, que no puede funcionar de esta manera, se siente humillado y desconcertado, pero el servicial profesor está completamente preparado para demostrar su genio en acción. Quizá no haga falta decirnos, a la mayor parte de nosotros, cómo ha sido creada la matemática, pero nos convendría escuchar las palabras de Félix Klein: «A menudo oye decir a los no-matemáticos, especialmente a los filósofos, que las matemáticas consisten exclusivamente en sacar conclusiones de unas premisas claramente establecidas, y que en este proceso no importa lo que las premisas significan, ni si son verdaderas o falsas, siempre que no se contradigan entre sí. Pero una persona que haya hecho un trabajo matemático productivo hablará de forma diferente. De hecho, esta gente [los no-matemáticos] piensan sólo en la forma cristalizada que finalmente adoptan las teorías matemáticas. Sin embargo, el investigador en matemáticas como en cualquier otra ciencia, no trabaja con un modelo deductivo riguroso. Por el contrario, esencialmente hace uso de su imaginación, y procede intuitivamente ayudado por métodos heurísticos. Se pueden dar numerosos ejemplos de matemáticos que habiendo descubierto teoremas de gran importancia no han sido capaces de demostrarlos. ¿Deberíamos insistir en que esto no son matemáticas, por respeto a la definición anterior, y negarnos a reconocer sus logros? Después de todo, el modo en que se use la palabra es algo arbitrario, pero ningún juicio de valor podrá negar que el trabajo inductivo de quien enuncia un teorema por primera vez es, por lo menos, tan válido como el trabajo deductivo de quien lo prueba. Pues ambos son igualmente necesarios, y sin el descubrimiento no sería posible la conclusión posterior.» Es intelectualmente deshonesto enseñar la interpretación deductiva como si se llegara a los resultados por pura lógica.

La interpretación lógica produce complicaciones prácticas. Si un estudiante tiene que demostrar, por ejemplo,

que $4ab\,(ab+3ac) = 4a^2b^2 + 12a^2bc$, debiendo justificar cada paso, tendrá que pensar cuidadosamente y dar razones a tantos pasos que necesitará minutos para hacer lo que haría casi automáticamente sobre la base de la experiencia numérica. Es muy preferible que los estudiantes se familiaricen con las propiedades básicas, tales como la distributividad, conmutatividad y asociatividad, hasta el punto de no advertir cuándo las están usando.

Pedir a los estudiantes que citen los axiomas en las operaciones elementales con números es como pedirle a un adulto que justifique cada acción que realiza al levantarse por la mañana. ¿Por qué se baña? ¿Por qué se limpia los dientes? ¿Por qué se pone la ropa? Si un hombre tuviera que plantearse estas preguntas y responderlas, nunca llegaría al trabajo. La mayor parte de las cosas que hace por la mañana deben ser habituales.

Hay un cuento sobre un ciempiés que iba caminando tranquilamente cuando se encontró con un sapo. El sapo le dijo al ciempiés: «Es asombroso que teniendo cien pies sepas cuándo debes usar cada uno». Al instante el ciempiés comenzó a pensar qué pie debía usar a continuación y no se pudo mover.

Los estudiantes deberían habituarse a las operaciones elementales con números, de tal forma que no tuvieran que pensar en ellas. Después de ver que cuatro conjuntos de tres cubos y tres conjuntos de cuatro cubos hacen ambos doce cubos, los estudiantes aceptarán el principio conmutativo como algo tan evidente que no necesita ser mencionado. Más aún, en vez de obligarles a considerar esta propiedad en los números naturales, en los números enteros, en los números racionales y en los demás, se les debería enseñar que todos los números poseen estas propiedades. De hecho, deberíamos hacer lo posible para que los estudiantes se familiarizaran con las operaciones elementales, hasta el punto de no pensar en ellas más de lo que se piensa cuando uno se ata el cordón de los zapatos. Debería alegrarnos que los alumnos aceptasen incondicionalmente hechos que les parecen completamente razonables, basándose en la experiencia con números o en argumentos intuitivos. Si un alumno no ve rápidamente que $3 \times a = a \times 3$, no es por no estar familiarizado con la propiedad conmutativa, sino por no haber comprendido que a es simplemente un numero. Cuando llegue el momento de estudiar una operación no conmutativa, entonces se deberá discutir el concepto de conmutatividad.

La necesidad de que parte del trabajo se realice automáticamente ha sido acentuada por hombres que sin duda comprendían el papel de las demostraciones deductivas. El filósofo Alfred North Whitehead dice en *An Introduction to Mathematics:* «Es un tópico profundamente erróneo, repetido por todos los libros de texto y por las personas eminentes cuando dan conferencias, que deberíamos cultivar el arte de pensar en lo que estamos haciendo. Sucede exactamente al revés. La civilización avanza al aumentar el número de operaciones importantes que podemos realizar sin pensar en ellas. Las operaciones del pensamiento son como las cargas de caballería en las batallas: su número debe ser estrictamente limitado, exigen caballos frescos y sólo deben hacerse en momentos decisivos.»

Hay muchos campos en los que el actual hincapié en la interpretación lógica es completamente hipócrita. ¿Qué matemático usa el desarrollo lógico de los números complejos para justificar sus operaciones con números reales o complejos? Esto es, sin embargo, lo que se enseña a los alumnos como camino para aprender la «verdad» sobre los números. ¿Cuántos matemáticos han comprobado alguna vez que $\sqrt{2}\sqrt{3}$ está definido en la teoría de los números irracionales, o han demostrado rigurosamente que $\sqrt{2}\ \sqrt{3} = \sqrt{3}\ \sqrt{2}$? ¿Cuántos han trabajado alguna vez sobre desarrollos de la geometría euclídea sin la ayuda de figuras? Félix Klein no vaciló en admitir: «Para mí es imposible seguir un argumento geométrico puramente lógico sin tener delante las figuras en las que el razonamiento se apoya constantemente.»

De hecho, la tentativa de mantener planteamientos completamente deductivos conduce a una trampa. A menudo es necesario recurrir a demostraciones que incluso los profesores de orientación lógica reconocen ser demasiado difíciles para el estudiante; por ejemplo, la demostración de la fórmula del área del círculo en geometría. Muchos textos evitan el problema aceptando como un axioma que el área es igual a πr^2, donde r es el radio. Naturalmente, si podemos introducir axiomas a voluntad no hay necesidad de probar nada. La única lección que un estudiante aprenderá de tales exposiciones es que cuando se quede atascado puede introducir un axioma. Mientras que en otras cuestiones se pide a los alumnos que asimilen trivialidades, en el axioma del área se les pide que se traguen un camello completo.

Por otra parte, al poder introducir axiomas libremente, numerosos textos emplean hasta setenta u ochenta axiomas. Como a los alumnos se les exige que al hacer las demostraciones citen los axiomas que justifican cada paso, están obligados a recordar los setenta u ochenta axiomas. Lo cual es una carga intolerable que los alumnos no pueden sobrellevar. Sin embargo, tales libros piden que se evite el estudio de memoria y que se enseñe a pensar y a comprender. El profesor de matemáticas no puede permitirse ser parco ni generoso en el uso de axiomas.

Otras medidas para evitar las demostraciones dificultosas son igualmente perjudiciales. En la presentación del sistema de los números reales, los textos de bachillerato parten de la axiomática de los números naturales. Pero al llegar a los números irracionales, los autores reconocen que su desarrollo lógico es demasiado difícil para los estudiantes, recurriendo a la recta numérica. Muestran cómo los enteros y las fracciones pueden relacionarse con los puntos de una recta y entonces hacen notar que para algunos puntos no existen los números correspondientes. Se introducen entonces los números irracionales, como los correspondientes a esos puntos. Si la presentación lógica de los números racionales tenía algún valor, éste se ha disipado a causa de esta introducción de los irracionales, tan carente de significado.

Todos los planes piden que se enseñe a los estudiantes a obtener los resultados por sí mismos. El descubrimiento, por oposición con y opuesto a la aceptación acrítica y pasiva de los enunciados acabados y pulidos de teoremas y demostraciones, supone la creación o recreación de las matemáticas por los estudiantes, posiblemente con la orientación del profesor. ¿Cómo crean los matemáticos? Su primera meta es adivinar un posible teorema. Cuando lo han logrado, deben realizar un nuevo trabajo creativo para encontrar la demostración. Como el gran matemático Carl Friedrich Gauss dijo, «he llegado al resultado, pero no sé todavía cómo demostrarlo». En el trabajo creativo intervienen la imaginación, la intuición, la experimentación, las conjeturas sensatas, el tanteo, las analogías, incluso las más vagas, los tropiezos y los titubeos. Las demostraciones deductivas juegan un papel pequeño, si juegan alguno.

La creatividad presupone flexibilidad en la resolución de un problema, y que tomemos ideas de todos los campos de las matemáticas, aunque no caigan dentro de los confines de una estructura axiomática particular. Esta última, de hecho, actúa como una camisa de fuerza mental.

¿Cuál es la contribución de la lógica a la creación de los conceptos?, ¿qué procesos deductivos nos llevan a considerar triángulos semejantes o a considerar las alturas o las medianas de un triángulo? La lógica sola no conduce hasta nuevas ideas, como la gramática no conduce a la poesía ni el solfeo a la música. La creación ha sido descrita algunas veces como el siguiente proceso. Las matemáticas dicen *A*, escriben *B*, quieren decir *C*, pero lo que significan es *D*. Y de hecho, *D* es una idea espléndida que emerge al poner orden en la confusión.

Algunas de las más grandes ideas no son cuestión de lógica. El mejor ejemplo es quizá la aplicación de la geometría no-euclídea al espacio físico. El aspecto lógico, a saber, llevar hasta el fin las consecuencias de aceptar un axioma de paralelas no-euclídeo, fue una tarea relativamente simple que realizaron Saccheri, Lambert, Legendre, Schweikart, Taurinus y muchos otros. Pero fue Gauss quien por vez primera reconoció que todas estas nuevas geometrías eran tan aplicables como la geometría euclídea. Las consecuencias que esto trajo para las matemáticas fueron tan revolucionarias como la misma creación de la matemática.

Uno de los principales matemáticos de nuestro tiempo,

Henri Lebesgue, señaló el papel subordinado de la lógica. «Ningún descubrimiento ha sido hecho en matemáticas, o en un campo relacionado, por un esfuerzo de lógica deductiva; los descubrimientos resultan del trabajo de la imaginación creadora, que construye lo que le parece que es verdad, guiada a veces por analogías, a veces por un ideal estético, pero sin apoyarse nunca en sólidas bases lógicas. Una vez que un descubrimiento ha sido hecho, la lógica interviene como un control; es la lógica la que decide finalmente si el descubrimiento es verdadero o ilusorio; su papel, por tanto, aunque considerable, es solamente secundario.»

Así que la concentración en la interpretación deductiva omite el trabajo vital. Destruye la vida y el espíritu de las matemáticas. La formulación deductiva atavía la actividad real, pero disimula la carne y el hueso. Es como las ropas que hacen a la mujer, pero no son la mujer. Es el último acto en el desarrollo de una rama de las matemáticas y, como dijo un prudente profesor, cuando se lleva a cabo la cuestión está lista para el entierro. La lógica debe ser una norma y una obligación de las matemáticas, pero no es su esencia en mayor medida que la gramática es la esencia de la Biblia o de las obras de Shakespeare. Las estructuras deductivas a las que muchos matemáticos llaman matemáticas son las ramas secas de una planta viva. Son formalismos vacíos opuestos a los contenidos reales; son la fachada de los palacios.

Otro de los argumentos que emplean los defensores de la nueva matemática es el de que las estructuras lógicas enseñan a los estudiantes a pensar deductivamente. Esto es probablemente correcto. Pero aunque sea así, ¿por qué es tan importante la lógica deductiva? No es el tipo de pensamiento que resulta útil en la vida diaria. No es posible solucionar deductivamente los problemas grandes y pequeños que los seres humanos encuentran en su vida. No hay axiomas evidentes por sí mismos de los cuales se pueda deducir qué camino seguir, con quién casarse o si ir al cine. Las verdaderas decisiones exigen discernimiento, para el que no hay lugar en el razonamiento deductivo. La mentalidad jurídica, la de negocio y la política son mucho más importantes.

Los modernistas utilizan a menudo otro argumento a favor de su planteamiento. Las matemáticas se pueden disfrutar como un juego jugado de acuerdo con ciertas normas. Pero, probablemente, ante la interpretación puramente axiomática de las matemáticas, un estudiante inteligente se preguntará: «¿por qué tengo que jugar este juego de acuerdo con estas particulares reglas?».

En vista de los muchos defectos pedagógicos de la interpretación lógica de las matemáticas, no es sorprendente que muchos matemáticos perspicaces (hay algunos no perspicaces) se hayan opuesto públicamente a la interpretación lógica. Descartes desaprobó la lógica en un lenguaje bastante severo. «Yo encuentro que la lógica, sus silogismos y la mayoría de sus preceptos son útiles para comunicar lo que ya sabemos, o para discernimiento de lo que ignoramos, pero no para la investigación de lo desconocido.» Roger Bacon dijo: «Un argumento puede decidir una cuestión, pero no nos da la seguridad de hallarnos ante una verdad, excepto si podemos comprobar por la experiencia que esta verdad lo es realmente.» Pascal apuntaba: «La razón es el lento y tortuoso método por el que descubren la verdad quienes no la comprenden.»

La interpretación lógica recuerda la réplica que Samuel Johnson dio a un hombre que insistía en pedirle una explicación de sus comentarios. Johnson dijo: «Le he dado un argumento, pero no estoy obligado a hacérselo comprender.» La estéril y seca interpretación axiomática no facilita la comprensión. El estilo de la lógica formal es una de las influencias más desvitalizadoras en la enseñanza de las matemáticas en la enseñanza secundaria. Una ordenada presentación lógica de las matemáticas puede tener un atractivo estético para el matemático, pero sirve de anestésico para el estudiante.

Estos argumentos contra una interpretación exclusivamente deductiva de las matemáticas no significan que se deba rechazar completamente el uso de las demostraciones deductivas. Estas tienen un lugar que discutiremos más

adelante (cap. 11), pero respecto a las demostraciones deductivas, es fundamental ponerlas en su sitio.

Quizá, después de todo, tenga alguna ventaja la interpretación lógica de las matemáticas. Como dijo Bertrand Russell en *The Principles of Mathematics* (pág. 360), «una de las principales ventajas de las demostraciones es que inculcan un cierto escepticismo respecto al resultado demostrado». Henri Lebesgue veía otro valor en las demostraciones deductivas: «La lógica nos hace rechazar ciertos argumentos, pero no nos puede hacer creer ningún argumento.» Se deben respetar las demostraciones matemáticas, pero sospechando de ellas. Si uno de los principales objetivos de la enseñanza de las matemáticas es inculcar el escepticismo en los estudiantes, éstos están obteniendo al menos un beneficio de las actuales extravagancias lógicas.

5. EL RIGOR

«La geometría no es nada si no es rigurosa... Se considera casi universalmente que los métodos de Euclides son impecables en lo que se refiere al rigor.»

Henri John Stephen Smith (1873)

Los portavoces de la matemática moderna no están contentos con la interpretación deductiva de las matemáticas. Quieren presentar un desarrollo deductivo riguroso.

Aclaremos primero la distinción entre desarrollo deductivo y desarrollo deductivo riguroso. La geometría euclídea, que la mayor parte de nosotros aprendimos en la escuela secundaria y que coincide esencialmente con la presentación que de ella hizo Euclides en sus *Elementos*, unos 300 años a. de J. C., es deductiva. Sin embargo, no es rigurosa. La distinción está en el hecho de que Euclides y sus sucesores, hasta épocas recientes, usaban implícitamente axiomas y teoremas que eran tan evidentemente verdaderos que o bien no comprendieron que los estaban usando (así como nosotros ignoramos el aire que respiramos), o pensaron que no había necesidad de enunciarlos o mencionarlos en las demostraciones. Así es obvio que una línea divide al plano en dos partes y que un triángulo tiene un interior y un exterior. Si tenemos tres puntos en una línea, parece evidente que uno y sólo uno de los tres puntos está entre los otros dos.

Consideremos otro ejemplo. Supongamos dos círculos trazados de tal forma que la distancia entre los dos centros es menor que la suma de los dos radios (fig. 5.1). Euclides no vaciló en afirmar que los círculos se cortaban en dos

puntos. Este hecho no está garantizado por los axiomas de Euclides. Se podría argumentar que la estructura del círculo es tal que exactamente en los dos lugares donde se supone que los círculos se cortan puede que no haya puntos de uno o de los dos círculos. El argumento es técnicamente correcto. Sin embargo, el concepto de círculo de Euclides, como nuestro concepto intuitivo, indica que se les puede dibujar como estructuras continuas, es decir, con puntos todo a lo largo de la circunferencia.

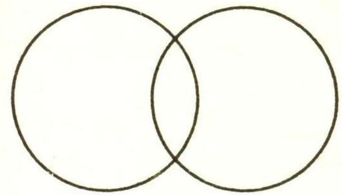

FIGURA 5.1

Como hemos dicho, estos y otros hechos fueron usados por Euclides y los textos tradicionales sin mencionarlos explícitamente. Los modernistas creen que lo que perturba a los estudiantes es el uso de suposiciones y teoremas no mencionados, y que, por no estar las demostraciones estrictamente completas, se dificulta la comprensión de los estudiantes. Es engañoso también, dicen los modernistas, presentar demostraciones supuestamente completas, pero que en realidad no lo están.

El remedio para estos «defectos» de la geometría euclídea tradicional es añadir axiomas adicionales y entonces demostrar cada afirmación, aunque sea evidente, mediante razonamientos deductivos. Los nuevos axiomas son de varios tipos: axiomas de existencia, axiomas de orden y axiomas de continuidad. Entre los axiomas que deben añadirse están los que afirman que la recta que une dos puntos cualesquiera es única, que la distancia entre dos puntos es única, que un plano contiene al menos tres puntos y que la línea divide al plano en dos partes. Hay también un axioma de continuidad que garantiza que dos círculos trazados previamente se cortan efectivamente en dos puntos y que si *A* y *B* (fig. 5.2) están a lados opuestos de una recta *l*, la línea que une *A* y *B* corta realmente a *l* en un punto común a las dos líneas. El enunciado de estos axiomas varía algo de uno a otro texto moderno.

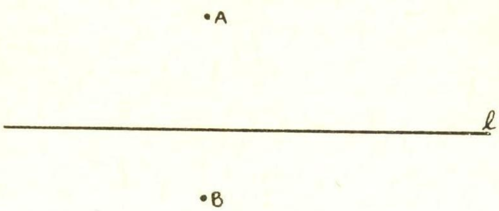

FIGURA 5.2

En el tratamiento moderno de las matemáticas se detallan todos los axiomas y teoremas necesarios para una interpretación deductiva rigurosa de la geometría. Esto implica la introducción de muchos axiomas adicionales y de docenas de teoremas cuyos resultados son obvios intuitivamente. Por ejemplo, se demuestra que un segmento no sólo tiene un punto medio, sino que éste es único, y que un triángulo tiene interior y exterior.

El rigor ha sido incorporado también al álgebra. Así que no se presupone que el resultado de sumar 4 y 6 sea un único número. Podrían concebirse dos respuestas. Se introduce el llamado axioma de cierre que afirma la existencia y unicidad de la suma. Al tratar con la relación de igualdad no se suponen sus propiedades evidentes. Se acepta como un axioma que $a = a$ y esta propiedad se llama reflexiva. ¿Podemos estar seguros de que si $a = b$, entonces $b = a$? Un axioma nos asegura que se cumple esto. Esta propiedad se llama simétrica. Finalmente se postula que si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$, con lo que la transitividad de la igualdad está asegurada.

En álgebra, como en geometría, la acumulación de axiomas requeridos por el rigor exige la demostración de teoremas evidentes, que los estudiantes usarían en otro caso inadvertidamente.

¿La incorporación del rigor supone una contribución a la pedagogía? Señalemos primeramente que algunos de los defectos ahora señalados en el desarrollo de la geometría euclídea podrían ser remediados fácilmente. Así, el método de Euclides para establecer sus teoremas sobre la congruencia de los triángulos se apoya en su axioma de que dos figuras son congruentes si pueden ser superpuestas. Hay objeciones válidas a este axioma, pero estas objeciones pueden evitarse fácilmente mediante un cambio intuitivamente aceptable, por ejemplo, diciendo que dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido de uno de ellos son iguales a los dos lados y el ángulo comprendido del otro. De esta manera se perfecciona a Euclides sin ir más allá de la comprensión de los jóvenes; así que no hay razón para no hacer el cambio. Por el contrario, hay serias objeciones contra la introducción de la mayor parte de los axiomas y teoremas que requieren un desarrollo deductivo verdaderamente riguroso.

Hasta hace unos cien años los matemáticos veían en el planteamiento de Euclides un modelo de rigor. Es verdad que algún matemático podía criticar esporádicamente el enunciado de un axioma o señalar la necesidad de un axioma adicional. Pero nadie se tomó estas críticas en serio porque sólo requerían pequeños cambios o adiciones. La creación de la geometría no-euclídea, en el primer tercio del siglo XIX, forzó a los matemáticos a ser más críticos respecto a la geometría euclídea y así se dieron cuenta de que Euclides había usado axiomas y teoremas intuitivamente tan evidentes que no se había percatado de estarlos usando.

Pedir a los estudiantes que reconozcan la necesidad de estos axiomas y teoremas que faltan es pedirles una actitud crítica y una madurez mental que no está al alcance de los jóvenes. Si los mejores matemáticos no advirtieron la falta de estos axiomas y teoremas durante dos mil años, ¿cómo puede esperarse que los jóvenes vean su necesidad? Para los defensores de las axiomáticas rigurosas no tiene ningún peso el que los mejores matemáticos hayan considerado durante dos mil años que la geometría euclídea, tal y como fue formulada por un Euclides supuestamente descuidado o ingenuo, como un modelo de rigor. Los estudiantes de hoy, aparentemente, son más listos y no están satisfechos con la tosca versión presentada por Euclides. Posiblemente, también es ésta la razón de que no vayan bien en geometría.

Para presentar un desarrollo riguroso del sistema numérico y de la geometría, debemos asegurarnos primero de que los estudiantes advierten las faltas de rigor, y entonces enseñarles a tenerlo. Los estudiantes de geometría usan figuras que automáticamente ponen de relieve detalles tales como el orden de los puntos en una línea, que la presentación rigurosa resuelve mediante axiomas adecuados. Así, el profesor tiene que emplear gran cantidad de tiempo en hacer comprender a un estudiante que ha aceptado muchos hechos con una base intuitiva o visual. Incluso si el profesor consigue, a base de insistencia y de hacer hincapié en ello, que los estudiantes vean la necesidad de los axiomas y de los teoremas que faltan, los estudiantes llegarán a una conclusión que no aumentará en nada su inclinación a las matemáticas. En un desarrollo riguroso del álgebra y la geometría es preciso demostrar muchos teoremas intuitivamente evidentes. La conclusión de los estudiantes será que las matemáticas se ocupan sobre todo de probar lo evidente.

Además, aunque los axiomas que los matemáticos introducen en la interpretación rigurosa son simples, en el sentido de que tratan de propiedades fundamentales de los puntos, líneas y planos, éstas no son las propiedades de las que se partiría naturalmente. Por ejemplo, uno de los axiomas de orden especifica que dados tres puntos en una línea, uno y sólo uno está entre los otros dos. Otro especifica que una recta que corta un lado de un triángulo necesariamente corta el otro lado. Otro más dice que si los puntos de una recta están divididos en dos conjuntos, tales que todos los puntos de uno de los conjuntos preceden, en el orden de los puntos de la recta, a los puntos del otro conjunto, entonces hay un punto y sólo uno que separa los puntos de los dos conjuntos. Tales axiomas se introducen para demostrar los teoremas más sencillos de la geometría euclídea. De hecho, muchos teoremas son más evidentes que los axiomas usados para demostrarlos. Así que lo menos evidente se usa para demostrar lo más evidente. Pero para los estudiantes el sentido de una demostración es exactamente el contrario. Los estudiantes se preguntarán qué es lo que se está intentando hacer e incluso dudarán de que los profesores estén cuerdos.

En un artículo sobre la lógica y la intuición, Henri Poincaré atacó esta locura. «Cuando un estudiante comienza a estudiar seriamente matemáticas, cree saber qué es una fracción, qué es la continuidad y cuál es el área de una superficie curva; considera como evidente, por ejemplo, que una función continua no puede cambiar de signo sin anularse. Si se le dice, sin ninguna preparación: No, eso no es evidente, debes demostrarlo; y si la demostración se apoya en premisas que le parecen menos evidentes que las conclusiones, ¿qué pensará el infortunado estudiante? Pensará que la ciencia de las matemáticas es sólo una acumulación arbitraria de sutilezas inútiles; se aburrirá de las matemáticas o se divertirá con ellas como con un juego y llegará a un estado mental análogo al de los sofistas griegos.»

Casi trescientos años antes, Blaise Pascal dijo en sus *Pensées:* «No intentéis demostrar nunca cosas que son tan evidentes por sí mismas que no existe nada más claro en que podamos apoyarnos para demostrarlas.»

Otra consecuencia de la incorporación de todos los axiomas requiere que una interpretación rigurosa de la geometría euclídea es que es preciso demostrar una multitud de teoremas triviales antes de llegar a los más importantes. El número de teoremas menores es tan grande que los principales rasgos del tema quedan oscurecidos. Además, el tiempo consumido en demostrar teoremas evidentes impide que los estudiantes estudien los teoremas significativos y profundos que son esenciales para avanzar en las matemáticas.

El desarrollo riguroso de una rama de las matemáticas es a menudo tan artificial que carece de significado. El ejemplo más claro es el del desarrollo lógico del sistema de los números reales. Había buenas razones para axiomatizar el sistema de números, pero la introducción de las fracciones y los números negativos mediante pares (véase el capítulo 4), con definiciones especiales de las operaciones entre estos pares, aunque pueda ser muy brillante, es tan artificial y forzada y está tan alejada del significado intuitivo y del uso de estos números como para imposibilitar toda comprensión.

Muchos profesores pueden replicar que los estudiantes ya han aprendido los hechos intuitivos acerca de los sistemas de números y pueden comprender la versión rigurosa como ejemplificación de la matemática. Si los estudiantes realmente comprenden el sistema de números intuitivamente, el desarrollo lógico no sólo *no* aumentará su comprensión, sino que la destruirá. Y como ejemplo de rigor matemático no se puede encontrar otro peor, por lo artificial de su construcción. El desarrollo está tan lleno de detalles y tan hinchado que no sólo anula la mente, sino que oscurece las ideas importantes. Sin embargo, este tema se ha convertido en el más importante de los cursos de matemáticas de la enseñanza secundaria y de los *colleges*.

Algunos de los axiomas que se usan en la interpretación rigurosa del sistema de números reales les resultan absurdos a los estudiantes. Se les pide que acepten el axioma de cierre. En el caso de los enteros, por ejemplo, este axioma dice: la suma de dos enteros es un entero. ¿Pensarían los alumnos, a falta de este axioma, que la suma de dos enteros es una vaca? En el caso de los números racionales (todos los enteros y fracciones positivos y negativos) se hace hincapié en la unicidad del inverso para la suma y la multiplicación. ¿Esperaban los estudiantes encontrar dos resultados al restar o al dividir? Los axiomas de cierre sólo sirven para cerrar las cabezas de los estudiantes.

La distinción entre demostración deductiva y rigor acarrea más complicaciones. Una demostración rigurosa no es estática. Las exigencias de rigor están cambiando constantemente y crecen en complejidad. Las matemáticas crecen como un árbol. Mientras el tronco, las ramas y las hojas

crecen, las raíces profundizan. Es seguro que ninguna demostración hecha antes del año 1800, por lo menos, en cualquier área de las matemáticas, excepto quizá en la teoría de números, puede considerarse satisfactoria desde la perspectiva del 1900. Pero la perspectiva del año 1900 ya no es aceptable. El significado pedagógico de la creciente exigencia de rigor es que los textos que puedan satisfacerla mantendrán a los estudiantes excavando constantemente en busca de las raíces y sin llegar nunca a ver propiamente el árbol. Sin embargo, este rigor no es necesario. Los jóvenes no lo necesitan más de lo que lo necesitaron los grandes matemáticos de hace cien años. Lo que fue intuitivamente aceptable hace dos mil años todavía es aceptable hoy. Por otra parte, los estudiantes pueden sentirse atraídos más fácilmente por los frutos que por las raíces de las matemáticas.

Es bastante irónico que los reformadores, en su esfuerzo por ser modernos y estar al día, decidieran hacer hincapié en el rigor de 1900. Han llegado al menos setenta y cinco años demasiado tarde. Al dar los toques finales a los planteamientos rigurosos que parecían satisfactorios a finales del siglo XIX, han aparecido dificultades lógicas precisamente en aquella rama de las matemáticas, la teoría de conjuntos, que es el tema de la nueva matemática en que más hincapié se hace. Estas dificultades, a las que eufemísticamente se llama paradojas, pero a las que propiamente se debería llamar contradicciones de la teoría de conjuntos, no han sido resueltas a satisfacción de todos los matemáticos, y la lógica de las matemáticas nunca ha estado en un estado tan triste. En realidad, actualmente no existe acuerdo sobre qué es una demostración matemática correcta, y es casi seguro que una interpretación axiomática de cualquier rama de las matemáticas resulte inadecuada.

No podemos entrar aquí en la historia del rigor o en la dificultad de construir rigurosamente las matemáticas, pero podemos señalar que muchos matemáticos son suficientemente escépticos sobre la posibilidad de alcanzar el rigor para hacer observaciones sarcásticas tales como «La lógica es el arte de cometer errores con confianza», ...«La ventaja de una demostración lógica no es imponer opiniones, sino sugerir dudas»..., «Una demostración matemática nos dice dónde concentrar nuestras dudas». Toda la preocupación por inyectar rigor a las matemáticas equivale a encontrar serpientes bajo las joyas.

Al igual que el razonamiento deductivo, el rigor juega un papel en las matemáticas; pero esto sólo afecta al profesional de las matemáticas, que quiere comprobar si las estructuras deductivas son firmes. Tales hombres, que han desarrollado su espíritu crítico después de años de especialización, pueden ver la necesidad del rigor y apreciar sus frutos. Sin esta experiencia, las detalladas y sofisticadas axiomáticas parecen inventos inútiles y sin sentido. Ofrecer esto a los estudiantes supone desconcertarlos y confundirlos, no ayudarlos. De hecho, la presentación deductiva rigurosa, introducida por los grandes matemáticos de finales del siglo XIX y primera parte del siglo XX, nunca pretendió ser una ayuda a la pedagogía. Los grandes matemáticos que tuvieron interés por la pedagogía siempre insistieron en que la presentación estrictamente lógica está completamente subordinada a la esencia, que se aprende intuitivamente. El rigor puede salvar a las matemáticas, pero seguramente perderá a los alumnos.

En vista de los perjuicios que la presentación rigurosa impone a la pedagogía, se podría muy bien preguntar por qué fue incorporada por los confeccionadores del plan. Hemos señalado ya que los diversos planes han sido escritos por grupos de matemáticos y profesores sacados de todos los niveles del mundo de las matemáticas. Algunos de ellos, conocedores recientes del rigor de 1900, se hicieron entusiastas portavoces de lo que les parecía la nueva cara de las matemáticas. Evidentemente, confundieron lo que es lógicamente prioritario con lo que es pedagógicamente deseable. Otros buscaban la novedad que el rigor suponía. Entre ellos también había matemáticos superficiales, relativamente ignorantes, que dieron un aspecto de profundidad a los temas más sencillos de las matemáticas elementales, disimulándolos mediante lo que de cara a los jóvenes sólo se puede describir como pedantería repipi. Buscaban de

ese modo dar una impresión de profunda penetración matemática. Es más fácil hacer sofisticados los temas triviales que dar una exposición clara e intuitiva de las ideas más difíciles. Gran parte del rigor de los textos modernos ha sido introducido por hombres que buscaban conciliar su propia superficialidad con una fachada de profundidad y por pedantes que enmascaraban su pedantería bajo el aspecto del rigor. Se les puede acusar de falsa sofisticación. Si la educación tradicional ha adolecido del rigorismo que imponía el aprendizaje mecánico, la nueva educación sufrirá aún más de manos de los traficantes en rigor.

«Si estás ansioso de brillar en la línea de la alta estética como hombre de rara cultura, / Debes tomar las semillas de las palabras transcendentales y plantarlas por todas partes. / Debes tumbarte sobre las margaritas y discursear con frases extrañas sobre el complejo estado de tu mente, / No importa lo que digas mientras sea un charloteo inútil lleno de transcendencia. / Y todos dirán mientras sigues tu místico camino, / "Si este joven se expresa en términos demasiado profundos para mí, / Bueno, ¡este profundo joven! debe ser singularmente profundo".»

Sir W. S. Gilbert

Uno de los defectos del plan tradicional, según los portavoces de la matemática moderna, es su lenguaje impreciso. Las imprecisiones y ambigüedades son, en su opinión, tan numerosas y tan graves que los estudiantes encuentran en ellas un fuerte obstáculo. El nuevo plan pretende erradicar estos defectos introduciendo un lenguaje preciso. Veamos cuál es la gravedad de los defectos y cómo se ha pretendido eliminarlos.

Para ilustrar la incorrección del lenguaje tradicional, los modernistas ponen este tipo de ejemplos: «Pedro tiene cuatro balones y Juan cinco. ¿Cuántos balones tienen los dos?» Cualquiera pensaría que eso quiere decir «¿cuál es la suma del número de balones que tiene Pedro y del número de balones que tiene Juan?, y respondería que nueve. No es así, dicen los modernistas. Los dos chicos juntos no tienen ningún balón, lo cual quiere decir, naturalmente, que no tienen balones en común.

En un segundo ejemplo se dice: «María se gasta doce centavos en dos lápices», y entonces se pregunta, «¿cuánto le ha costado cada uno?» Cualquiera respondería que seis centavos cada uno, suponiendo, a falta de más información, que los dos lápices son iguales. Los modernistas objetan que no se nos ha dicho explícitamente que los dos lápices sean iguales.

Parece evidente que estas preguntas, aunque estén mal formuladas, podrían ser replanteadas sin necesidad de ningún lenguaje especial. Pero los modernistas creen que es necesario un perfeccionamiento drástico del lenguaje de las matemáticas.

Para asegurar la precisión introducen la distinción entre número y numeral. El símbolo 7 no es un número, sino el símbolo de un número. Otros símbolos del mismo número son $3 + 4$, $5 + 2$, $8 - 1$ y muchos más. Se espera que los alumnos aprendan que trabajan con numerales, no con números. Para poner de relieve la necesidad de esta distinción los textos modernos dan el siguiente ejemplo. Se puede decir que el número 343 tiene tres dígitos. Pero $343 = 7^3$. Luego se podría decir que 7^3, que es el mismo número, contiene tres dígitos. La afirmación original debería ser que el *numeral* 343 contiene tres dígitos.

A propósito de la distinción entre número y numeral se cuenta que los redactores de un texto titularon uno de sus capítulos «Aprendiendo a leer y a escribir grandes números». Cuando se dieron cuenta de que se leen y escriben numerales, no números, cambiaron la palabra «números» por «numerales». Pero en seguida advirtieron que este título podía significar escribir numerales de gran tamaño, así que el título fue cambiado de nuevo por «Aprendiendo a leer y a escribir los numerales de grandes números». Pero a estas alturas ya nadie entendía lo que quería decir.

La precisión en el lenguaje está más «asegurada» usando el lenguaje de los conjuntos. Los conjuntos no son más que colecciones de objetos, por ejemplo, el conjunto de todas las manzanas, el conjunto de todos los números y el conjunto de los hombres. Al usar el concepto de conjunto se pueden escribir muchos enunciados matemáticos, teóricamente para hacerlos más precisos. Así, en vez de preguntar qué valores de x satisfacen la ecuación $x + 3 = 5$, se llama a tales expresiones frases abiertas y se pregunta cuál es el conjunto de verdad de esta frase abierta. El conjunto de verdad está formado por los valores de x que satisfacen la ecuación. Naturalmente, en el conjunto de verdad de esta frase abierta sólo hay un valor, $x = 3$. El conjunto de verdad de la frase abierta $x^2 = 4$ lo forman 2 y -2.

Para asegurar la precisión, los modernistas han reemplazado muchas definiciones de los textos tradicionales por sus propias versiones. En un texto tradicional una variable puede definirse como un símbolo o letra que puede tomar cualquiera de los valores de una colección o conjunto. Así, la x en $y = x^2$ puede tomar cualquier valor real. Este lenguaje no es aceptable en las matemáticas modernas. Un texto moderno diría que una variable es un símbolo que puede representar a cualquiera de los elementos de un conjunto definido. Al conjunto cuyos elementos pueden sustituir a una variable se le llama conjunto de sustitución de la variable. También se le llama dominio de la variable. Los elementos individuales del conjunto de sustitución se llaman valores de la variable. Una variable con un solo valor se llama una constante [1].

Las variables son importantes porque entran en las funciones. Así, $y = x^2$ es una función, y la definición tradicional de una función es una relación entre variables tal que si se le asigna un valor a una variable, el valor o los valores de la segunda están determinados. Así, en el caso de $y = x^2$, si $x = 3$, entonces y tiene el valor único 9. Por otro lado, si la función es $y^2 = x + 5$, entonces cuando $x = 4$, $y = +3$ e $y = -3$. La función $y = x^2$ se llama uniforme, y la función $y^2 = x + 5$, multiforme.

---

[1] Lógicamente, esta definición de variable parece presentar problemas. Si una constante se define como una variable con un solo valor, ¿qué son los elementos del conjunto de reemplazamiento?, ¿no son constantes? Si lo son, el concepto de constante está incluido en la definición de variable.

Una «chapuza» semejante no cabe en los textos modernos. Primero se introduce la noción de par ordenado. Así, $(3,4)$, $(5,6)$ y $(6,-2)$ son pares ordenados de números reales. El concepto de función, uniforme o multiforme, es reemplazado por el concepto de relación. Una relación es cualquier conjunto de pares ordenados. Una función (en el sentido de función uniforme) es una relación en la que no hay dos pares ordenados distintos que tengan la misma primera componente. Así, $(4,3)$ y $(4,-3)$ no pueden pertenecer al conjunto de pares ordenados que define una función. Dadas estas definiciones de relación y función se espera que los estudiantes vean que $y^2 = x + 5$ es una relación y que $y = x^2$ es una función.

En geometría se asegura la precisión mediante una cuidadosa distinción de conceptos. Un ángulo, para Euclides, es la inclinación entre dos líneas que se cortan en un punto. Por lo visto no es así. Un ángulo es ahora la figura formada por dos semi-rectas que se cortan en un punto común (fig. 6.1). Naturalmente, si el ángulo son las dos semi-rectas, no sabemos de qué ángulo se habla, si del A o el B. Para decidir necesitamos saber qué es el interior de un ángulo. Con este propósito necesitamos otro axioma (o teorema en algunas exposiciones). Este axioma establece que una línea divide el plano en dos partes. Si tomamos la parte del plano determinada por la recta OC (que incluye la semi-recta OC) que contiene D, y tomamos la parte determinada por la recta OD que contiene a C y ahora tomamos el conjunto intersección de estas dos partes (los puntos comunes a estas dos partes), obtenemos el interior del ángulo DOC. Habiendo determinado el interior del ángulo podemos probar que si E y F están en el interior del ángulo (fig. 6.1), entonces el segmento EF está en el interior del ángulo.

El saber de qué ángulo estamos hablando no nos dice cuál es su medida (tamaño). Pero otro axioma nos dice que se pueden numerar todas las semi-rectas que salen de O (fig. 6.1) a partir de OC, y que el número asignado a OD es la medida del ángulo DOC. Así, el número 0 se asigna a OC porque la numeración comienza en ella, y a OD se le puede

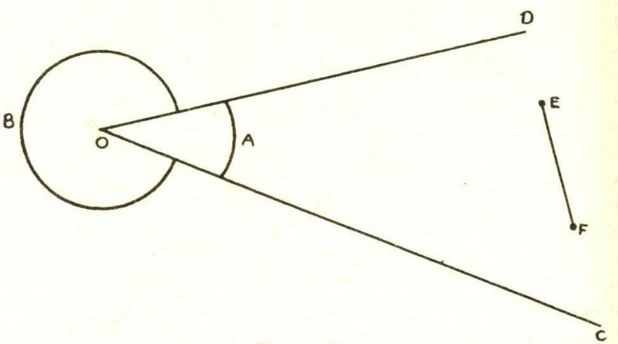

FIGURA 6.1

asignar el número 30. Luego el tamaño del ángulo *COD* es 30.

Los ángulos se estudian a menudo como partes de un triángulo. Al ver la figura 6.2 podríamos sentirnos tentados de decir que el ángulo *A* es un ángulo del triángulo *BAC* y que *BA* y *CA* son los lados del ángulo. Esto sería groseramente incorrecto. Los lados de un ángulo son semi-rectas que se prolongan hasta el infinito, mientras que *BA* y *CA*

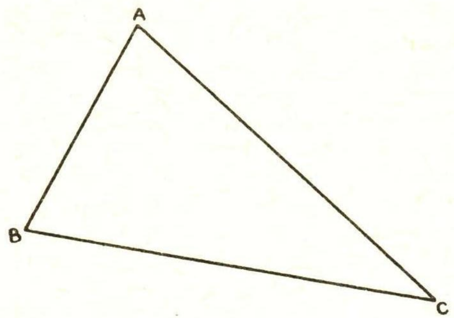

FIGURA 6.2

son segmentos finitos. Sin embargo, algunos autores conceden una dispensa a sus lectores y les permiten hablar del ángulo *A* como ángulo del triángulo *BAC*.

Euclides fue muy descuidado al definir un triángulo como una figura formada por tres segmentos. Naturalmente, esto no es así. La figura 6.3 está formada por tres segmentos y no es un triángulo. «Propiamente», un triángulo es una figura consistente en la unión (noción de la teoría de conjuntos) de tres puntos no alineados y de los segmentos que unen estos puntos.

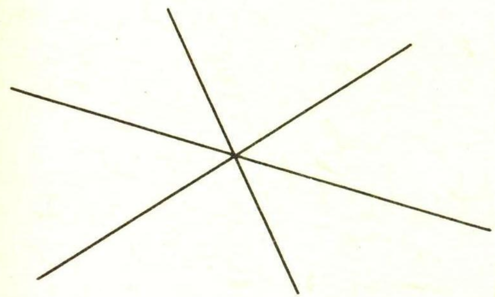

FIGURA 6.3

En álgebra elemental y en geometría analítica los estudiantes aprenden qué es un sistema de coordenadas rectangulares. En este sistema cada punto del plano está localizado mediante dos números. El primero es la distancia del punto al eje *y*, desde su derecha o su izquierda, y el segundo es la distancia a que se encuentra por encima o por debajo del eje *x*. Así, las coordenadas del punto *P* en la figura 6.4 son 2 y 4. Se escriben como pares ordenados $(2, 4)$. Este enfoque de las coordenadas resulta demasiado tosco para muchos modernistas. Consideran la noción de sistema de coordenadas a través del concepto de espacio producto. Si se tienen los dos conjuntos *A* y *B*, entonces el espacio producto es el conjunto de los pares (a, b) tales que *a* pertenece a A y b a B. El orden de los elementos de un par debe conservarse. Es decir, que el producto de A por B no es igual al producto de B por A. Para llegar a la noción de coordenadas de un punto en el plano, se toman A y B como el conjunto de los números reales, y el espacio producto de estos dos conjuntos es el conjunto de las coordenadas (a, b). Entonces se identifica a con la distancia de P al eje y, y b con la distancia de P al eje x. Se supone que la noción de espacio producto introduce más precisión en la definición de las coordenadas.

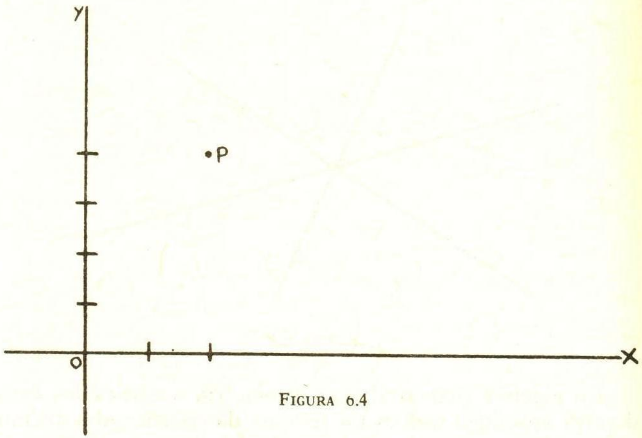

FIGURA 6.4

De acuerdo con su deseo de asegurar la precisión, los textos modernos definen cuidadosamente cada uno de los conceptos que usan. La consecuencia de esto es una sobreacumulación de terminología. Así tenemos las definiciones de ángulo, triángulo, polígono, numeral, ecuación, frase abierta, enunciado abierto, expresión algebraica, operación binaria, cierre, inverso, unicidad del inverso, conjunto nulo (vacío), unión, intersección, conjunto solución, segmento, par de puntos, distancia, longitud, semi-recta y muchos otros términos. Un recuento real del número de términos

introducidos en el curso de álgebra de noveno grado y en el curso de geometría de décimo grado, muestran que se han introducido en cada uno cientos de términos. Naturalmente, se espera que los estudiantes se aprendan estos términos y los usen.

Gran parte de esta terminología es abstracta. Naturalmente, los autores de textos modernos desean introducir la suma y la multiplicación. Estas operaciones, aplicadas a números, se enseñan en los grados elementales. Aplicadas a letras, se enseñan en el álgebra. Sin embargo, los términos suma y multiplicación se consideran muy mundanos. Para tratar de la suma de 5 y 7, los textos hablan de una operación binaria, refiriéndose a que la suma se aplica a dos números o letras. La multiplicación, igualmente, es una operación binaria.

Estos ejemplos pueden ilustrar lo que los modernistas quieren dar a entender cuando dicen que es posible eliminar los errores y el pensamiento confuso mediante un lenguaje preciso. Consideraremos ahora su tesis. Una muestra típica de precisión es la distinción que ya hemos señalado, a saber, la distinción entre número y numeral. Esta distinción provoca una pregunta: si 7 es un numeral para el número siete, ¿qué es un número? Es una idea en la mente, se les dice a los estudiantes. Esta respuesta difícilmente puede satisfacer a los jóvenes; la distinción hace más mal que bien. Se envuelve a los números en el misterio y se hace dudar a los estudiantes de su capacidad de comprensión.

Desde luego, hay una distinción entre número y numeral, y entre el nombre Roberto Fernández y el muchacho Roberto Fernández. Sin embargo, las prácticas incorporadas al lenguaje a veces se saltan etapas, pero en todo caso permiten una comunicación efectiva. El exceso de palabras se debe evitar si no hay peligro de error. Parece innecesario decir «el niño cuyo nombre es Roberto Fernández» cuando al decir Roberto Fernández claramente se refiere al niño y no a su nombre. El contexto determina el significado en casi todos los casos. El 2 en 245 y 425 tiene significado distinto, pero esto no provoca ninguna confusión.

Gran parte de la nueva terminología es totalmente innecesaria. Al hablar de operaciones binarias, de cierre, etc., se emplean muchos términos para etiquetar lo que no necesita ser etiquetado. Parte de esta terminología reemplaza a la vieja sin ninguna ventaja en particular. Así, se decía que $x + 2$ era una expresión. Ahora es una frase abierta, abierta porque el valor de x no está especificado. Una ecuación, por ejemplo $x + 2 = 0$, se supone que resulta más clara si se la rebautiza como proposición abierta. El problema de resolver una ecuación en x se convierte en el problema de encontrar el conjunto de verdad de una proposición abierta, pero el problema de resolver la ecuación es el mismo que antes de introducir la nueva terminología.

La comprensión que los estudiantes adquieren generalmente a través de la experiencia es suficientemente buena; habitualmente las definiciones formales no son necesarias. Los estudiantes saben lo que es un triángulo y no es necesario enseñarles que consiste en la unión de tres puntos no alineados y de los tres segmentos que los unen. Después de leer semejante definición hay que pensarla, y cuesta trabajo admitir que se refiere al familiar triángulo. Los términos «relación» y «función» han sustituido a las funciones multiformes y uniformes. El viejo término, función multiforme, estaba lleno de significado; el nuevo, relación, resulta vago. Además, la relación y la función se definen en términos de conjuntos de pares ordenados. Se supone que este conjunto transmite la idea de, digamos, $y = 3x$, donde x puede tomar todos los valores reales e y es tres veces x. Sin embargo, la función tiene un número infinito de valores de x y de y. La definición como un conjunto de pares ordenados crea una visión deformada porque da la impresión de que es finito el número de pares que forman el conjunto. Además, la función no puede especificarse enumerando el conjunto de los pares ordenados, porque el número de pares es infinito, mientras que $y = 3x$ especifica toda la función. Finalmente, la idea intuitiva básica de función —es decir, que al variar los valores de una variable x varían también los valores de la segunda variable y, dependiendo de los valores que toma la primera— se pierde en la descripción estática de un conjunto ordenado de pares. Aparentemente, la novedad es deseable incluso a costa de la comprensión.

Se debe admitir que hay funciones en las que x sólo puede tomar un número finito de valores enteros. Por ejemplo, la función que expresa la población de Nueva York, siendo x el tiempo, por ejemplo el número de meses desde el 1 de enero de 1950 hasta el 1 de enero de 1970, e y la población correspondiente, tendrá sólo un número finito de valores enteros de x y de y. Aunque la definición de pares ordenados es más aplicable en estos casos especiales, no es de gran ayuda.

La introducción de tantos términos nuevos, y particularmente de términos que no sugieren los conceptos que representan, supone una carga intolerable para la memoria. El exceso de terminología ha sido criticado por Richard P. Feynman, profesor de Física en el Instituto de Tecnología de California y premio Nobel en 1965. El profesor Feynman estuvo en la California State Curriculum Commission, que examinó los textos que se iban a usar en las escuelas de California. En su artículo «New Textbooks for the New Mathematics», que apareció en *Engineering and Science*, atacaba el exceso de terminología en la geometría. «Muchos de los libros se explayan en la definición de curva cerrada, curva abierta, región abierta, etc., y sin embargo la única geometría que enseñan es el hecho de que una línea recta trazada en el plano lo divide en dos partes. Al final de algunos de estos libros de geometría, conviene tratar de ver qué conocimientos de geometría se han adquirido exactamente tras un largo discurso o un largo esfuerzo para aprender. Pienso que a menudo el número total de hechos que se han aprendido es muy pequeño, mientras que el número total de palabras es muy grande. Esto es insatisfactorio. Además hay una tendencia en algunos de estos libros a usar palabras peculiares: la jerga técnica de la más pura matemática. No veo ninguna razón para esto.»

La terminología, especialmente la terminología pretenciosa, no puede sustituir el contenido. En vista del énfasis que ponen en la terminología, es evidente que los reformadores creen que el dar nombres a las cosas otorga automáticamente poder sobre ellas. Muchas críticas señalan que los textos de matemática moderna no son más que diccionarios o estudios de lingüística.

Parece indudable que la supuesta novedad de las nuevas matemáticas procede en buena medida de la introducción de una nueva terminología, menos útil que la antigua. Lo que se ha presentado como matemática moderna es más bien palabrería y muchas veces una parodia de dicha matemática moderna.

Otro medio de lograr precisión muy explotado por las nuevas matemáticas es el simbolismo. Puesto que los conjuntos son un tema básico del plan, hay una notación para ellos. Así, $\{1, 2, 3\}$ denota el conjunto que contiene los elementos 1, 2, 3. El plan también distingue entre los objetos y el conjunto formado por esos conjuntos. Así, 3 y $\{3\}$ son entes diferentes. La razón de esta distinción es que el conjunto $\{3\}$ se puede sumar a otros conjuntos, pero el objeto 3 no se puede sumar a otros conjuntos, del mismo modo que los caballos y las vacas no se pueden sumar a menos que pensemos en ellos como pertenecientes a un género superior de animales. Otra cuestión es que los estudiantes comprendan esta distinción, pero si lo logran, es probable que el siguiente paso los trastorne. En la teoría de conjuntos entra el concepto de conjunto vacío. El conjunto vacío, designado normalmente por el signo φ, se puede ejemplificar con el conjunto de los reyes de Estados Unidos. Sin embargo, un conjunto formado por el conjunto vacío, es decir, $\{\varphi\}$, no es vacío porque contiene el conjunto vacío[2].

Para especificar el conjunto de todos los valores de x que satisfacen $x + 2 = 4$, es decir, los valores que convierten en proposiciones verdaderas, la proposición abierta $x + 2 = 4$, la notación moderna exige escribir $\{x/x+2=4\}$. Para indicar que el 1 forma parte del conjunto 1, 2, 3, se

[2] De este modo podemos crear de la nada y llegar a la riqueza desde la miseria más absoluta.

escribe $1 \in \{1, 2, 3\}$, donde el símbolo $\in$ significa «pertenece a». Para designar propiamente la colección de todos los perros de Estados Unidos, se debe escribir $\{x/x$ es un perro de Estados Unidos$\}$.

Con el simbolismo anterior se pueden estructurar en forma simbólica enunciados más complejos. Así, para especificar la colección de todos los gatos y perros de Estados Unidos se escribe $\{x/x$ es un perro de Estados Unidos$\} \cup \{x/x$ es un gato de Estados Unidos$\}$. Aquí $\cup$ simboliza la unión de dos conjuntos, es decir, la colección de todos los objetos que están en uno de los dos conjuntos al menos. Si se quiere preguntar cuál de los números 1, 2 y 3 satisface la desigualdad $3x - 1 < 8$, se debe escribir: si $x \in \{1, 2, 3\}$, determinar los elementos de $\{x/3x - 1 < 8\}$. Igualmente, para describir los valores de x e y para los que $x + y = 5$, se escribe $\{(x, y)/x + y = 5\}$. Los valores positivos de y en $x - 6y = 10$, que corresponden a $x = -10$ y $x = 2$, se denotan mediante el conjunto solución de $x - 6y = 10$, $x \in \{-10, 2\}$, $y \in \{$números positivos$\}$. Para especificar que hay al menos un valor de x para el que $x + 2 = 3$, se usa la notación $\{\exists x \mid x + 2 = 3\}$. Por otro lado, para establecer que un número par no es impar, expresamos mediante p_x que x es par, y mediante q_x, que x no es impar. Entonces usando el símbolo $\rightarrow$, que significa implicación, se escribe $\forall_x(p_x \rightarrow q_x)$, que expresado en palabras dice que para todo x, x par implica que x no es impar. Los símbolos $\exists$ y $\forall$ se llaman cuantificadores.

La crítica aplicada a la terminología se aplica igualmente al uso de los símbolos. Naturalmente, habitualmente es necesario algún simbolismo. Cuando está justificada y cuidadosamente elegida, la notación contribuye a la clarificación de los conceptos y relaciones esenciales de la matemática, y ahorra trabajo en las operaciones. También ayuda en la comprensión de las ideas. Expresar con palabras la expresión $a^2 + 2ab + b^2$, no sólo resultaría más largo, sino que sería más difícil de comprender.

Sin embargo, el plan de matemática moderna ha hecho del uso excesivo de símbolos más un vicio que una virtud.

Consideremos el ejemplo siguiente. Dada la expresión $f(x, y) = 3x - 2y = 1$, determinar el conjunto

$$A = \{(x,y) \mid x \in N, y \in N, f(x, y) = 1\},$$

donde N es el conjunto de los números enteros. Todo este simbolismo equivale a decir: determinar las soluciones enteras de $3x - 2y = 1$. Los autores modernos disfrutan con los símbolos. Así encontramos corchetes, llaves, barras verticales, paréntesis, cuantificadores, los símbolos de implicación y doble implicación, los símbolos de unión e intersección, el signo $\in$ de pertenencia y muchos otros símbolos. Los estudiantes quedan aturdidos por estos símbolos oscuramente amenazadores.

Muchos símbolos no sirven para nada; el lenguaje ordinario es mejor. El pequeño ahorro de espacio está más que compensado por el obstáculo psicológico que el simbolismo supone para el estudiante. Nadar en símbolos hace más difícil la lectura y la comprensión. Cuando cuesta recordar lo que los símbolos significan, sería menos perjudicial usar expresiones verbales. Por otra parte, los símbolos asustan a los estudiantes, y por ello deben usarse con parquedad. La dificultad en recordar sus significados y la general falta de atractivo de las expresiones simbólicas repelen y molestan a los estudiantes; los símbolos son como banderas enemigas flotando sobre una ciudadela aparentemente inexpugnable. El mismo hecho de que el simbolismo no comenzara a ser usado habitualmente en las matemáticas hasta los siglos XVI y XVII indica que no es fácilmente accesible para la gente.

El simbolismo puede servir para tres fines. Puede comunicar eficazmente las ideas, puede ocultar las ideas y puede ocultar la ausencia de ideas. A menudo parece como si los textos modernos de matemáticas usasen el simbolismo para ocultar la pobreza de ideas. En otros casos, el propósito de su simbolismo parece ser el de hacer inescrutable lo evidente y evitar así su comprensión.

El énfasis exagerado en el simbolismo puede dar a la mayor parte de la gente una impresión sobre las matemáticas análoga a la que se sacaría de una presentación de la música que centrara todo el esfuerzo en aprender a escribir y leer la notación musical. No tendríamos ningún indicio de lo que significan las notas, los agudos, los bemoles, el tiempo del compás o cualquier otro símbolo, en relación con los sonidos reales, bellos temas y composiciones completas, que los símbolos simplemente registran. En realidad, se puede llevar más allá la analogía entre la música y las matemáticas, en lo referente a la educación. Nadie transcribe las notas de una composición musical y la interpreta después para saber qué quieren decir las notas. Las ideas e incluso el desarrollo total están pensados e «interpretados» en la mente del compositor antes de que los exprese mediante la notación musical. Así, también las ideas y los argumentos con los que trabaja el matemático tienen una realidad física, intuitiva y geométrica mucho antes de ser expresados mediante símbolos. Vemos entonces que los símbolos de las matemáticas, como las notas musicales, son simplemente una escritura artificial sin significado intrínseco. Sólo pueden transmitir la vida, el significado, la riqueza de pensamiento y la belleza si las ideas y los pensamientos que los símbolos simplemente transcriben se enseñan usando tan pocos símbolos como sea posible.

A pesar de las desventajas que acarrea el uso de símbolos, los textos de matemáticas modernas prefieren usarlos generosamente. Cabe sospechar que lo hacen para dar un aire de profundidad a lo simple y sencillo. Incluso se encuentran expresiones verbales «aclaradas mediante símbolos», como si los símbolos clarificasen las palabras.

Lo ridículo de los esfuerzos por conseguir la precisión mediante la terminología y el simbolismo ha sido puesto de relieve por el profesor Feynman. En su artículo «New textbooks for the New Mathematics», critica la búsqueda de precisión mediante el uso del lenguaje de los conjuntos. Caricaturizando la precisión, escribe: «Un guardián del zoo, para mandar a su ayudante que saque los lagartos enfermos de la jaula, podría decir: "Toma el conjunto de animales formado por la intersección del conjunto de los lagartos con el de los animales enfermos y sácalos de la jaula." Este lenguaje es correcto, preciso, es el lenguaje de la teoría de conjuntos, pero no dice más que "Saca los lagartos enfermos de la jaula...". La gente que usa las matemáticas en la ciencia, la ingeniería y demás, nunca usa frases tan largas como las de nuestro imaginario guardián... A la mayor parte de la gente que ha estudiado estos libros de texto puede que le sorprenda descubrir que los símbolos $\cup$ y $\cap$, de unión e intersección de conjuntos, el uso especial de los corchetes y toda la notación elaborada para los conjuntos que se da en estos libros, no aparece casi nunca en los artículos de física teórica, ingeniería, aritmética empresarial, diseño de computadores u otros campos en los que se aplican las matemáticas. No veo ninguna necesidad ni razón para que todo esto se exponga o sea enseñado en la escuela. No es una forma útil, ni lógica o sencilla, de expresarse. Se supone que proporciona precisión, pero ¿precisión para qué?»

Feynman incluye en su crítica estas palabras: «Muchos de los libros de matemáticas que se recomiendan ahora están llenos de estos sinsentidos, palabras especiales, cuidadosa y precisamente definidas, que son usadas por los matemáticos puros en sus análisis más sutiles y difíciles y que nadie más usa... El problema real al hablar no es que el lenguaje sea *preciso*. El problema es que el lenguaje sea *claro*.» Pone como ejemplo una forma de las ahora habituales de buscar precisión, la distinción entre una pelota y el dibujo de una pelota. Un texto dice: «Colorear de rojo el dibujo de la pelota», en vez de «Colorear la pelota de rojo». Feynman señala que la frase «Colorear de rojo el dibujo de la pelota» comienza por crear dudas, mientras que «Colorear la pelota de rojo» no las crea. El dibujo de la pelota incluye la pelota y un paisaje. ¿Se deberá colorear también el paisaje? Como también indica Feynman, los conjuntos, a los que ahora se da tanta importancia, se usan solamente de manera forzada para levantar construcciones artificiales y complicadas.

7. LA MATEMATICA POR LA MATEMATICA

«Se puede decir que las matemáticas hablan de cosas que no interesan al hombre en absoluto... Parece una ironía de la creación el que la mente del hombre sepa manejar mejor aquellas cosas que más lejos están del centro de su existencia. Así, somos especialmente capaces en aquellos terrenos en que el conocimiento importa menos: en matemáticas, especialmente en teoría numérica.»

Hermann Weyl

La nueva matemática se presenta como autosuficiente. Se presupone que las matemáticas pueden alimentar su propio crecimiento y que su estudio por sí y para sí tiene un valor.

Por ejemplo, se presenta a las matemáticas generándose a sí mismas. Así, dados los números naturales, las fracciones pueden introducirse y se introducen en el nuevo plan preguntando qué número x satisface $3x = 7$. Está claro que no todo número cumple esto, y por tanto, se nos dice, los matemáticos se ven obligados a introducir las fracciones, por ejemplo $7/3$. Dados los números positivos y las fracciones se puede preguntar qué número x satisface la ecuación $x + 5 = 2$. Una vez más, los números existentes se muestran inútiles para resolver tales ecuaciones, y así es como se crean los números negativos. Un planteamiento análogo conduce a la introducción de los números irracionales y de los números complejos, es decir, números que son raíces cuadradas de números negativos, por ejemplo $\sqrt{-5}$.

No sólo se introducen los diversos tipos de números para resolver problemas matemáticos, sino que los axiomas que se verifican para todos los números se suponen aplicables a cada una de las nuevas clases introducidas, y de este modo se demuestran las propiedades de cada una de estas clases. Hemos ilustrado este último hecho en conexión con la interpretación deductiva adoptada para la nueva matemática.

Hay otro ejemplo de la introducción de nuevas ideas matemáticas a partir de los problemas que plantean las antiguas. Al resolver ecuaciones lineales, es decir, ecuaciones de la forma $ax + b = 0$, es importante matemáticamente preguntar si se pueden resolver ecuaciones tales como $x^2 + 7x + 9 = 0$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, y, en general, $ax^2 + bx + c = 0$.

No es posible desarrollar todas las matemáticas proponiendo problemas sobre las ideas ya estudiadas. La geometría debe introducirse partiendo de cero. Sin embargo, una vez que ha sido introducida es fácil proponer cuestiones matemáticas que planteen nuevos temas geométricos. Por ejemplo, una vez que los estudiantes han estudiado la congruencia de triángulos se puede preguntar: «¿Qué se puede decir acerca de dos triángulos que tienen sus ángulos iguales?» Tales triángulos no necesitan ser congruentes, pero son semejantes, y de esta forma se sugiere el estudio de los triángulos semejantes. Igualmente, una vez que hemos considerado los triángulos, que son figuras de tres lados, se pueden formular y responder preguntas sobre los cuadriláteros o figuras de cuatro lados. Estos ejemplos pueden servir para ilustrar lo que se entiende al decir que las matemáticas se generan a sí mismas. Los nuevos conceptos y los nuevos problemas se introducen planteando preguntas acerca de conceptos ya estudiados.

Históricamente este enfoque de las matemáticas es totalmente falso. Los conceptos, operaciones, teoremas e incluso métodos de demostración importantes fueron sugeridos por situaciones y fenómenos reales. La matemática nació de nuestras experiencias en el mundo físico. Por ejemplo, como ya hemos señalado por otra razón, nuestro método de sumar fracciones fue adoptado porque la suma así obtenida representa lo que resulta físicamente cuando se reúnen partes de objetos. Podríamos haber sumado numeradores y denominadores, de forma que $1/2 + 1/2 = 2/4$, pero este resultado no es cierto cuando juntamos medio pastel a otro medio pastel. Igualmente, las propiedades que poseen las operaciones matemáticas no son el resultado de extender las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva a nuevos elementos. Si la multiplicación de matrices debe ser no conmutativa para ser útil, abandonaremos la conmutatividad, aunque podríamos definir una multiplicación de matrices conmutativa. Así, el extender los axiomas asociativo, conmutativo y distributivo a nuevas clases de números podría llevarnos a unas matemáticas inútiles. La geometría también surge del estudio de las figuras reales existentes en el espacio físico y del deseo de conocer las propiedades de las figuras reales y del espacio mismo.

El origen histórico de los procesos y conceptos matemáticos no tiene por qué ser una interpretación pedagógica. Sin embargo, una objeción válida a la generación de los nuevos conceptos y operaciones a partir de los viejos es la falta de sentido de lo que se introduce. Por ejemplo, para introducir los números negativos, algunos textos modernos preguntan: «¿Qué número hay que sumar al 2 para que dé 0?» Entonces introducen el -2 como el número requerido. Como algunos textos dicen, el -2 es el único elemento opuesto al 2 respecto a la suma. Pero esta introducción del -2 no nos dice nada, como la definición «Antimateria es la sustancia que añadida a la materia produce el vacío» no nos dice nada sobre la antimateria.

Al generar las matemáticas a partir de proposiciones matemáticas y al extender a nuevos dominios las leyes o los axiomas que se cumplen en lo previamente establecido, las matemáticas han quedado aisladas de todos los otros cuerpos del conocimiento. Existe por sí misma y se supone que es autosuficiente. Entonces parece como si las estructuras deductivas así construidas se ajustaran casualmente a algunos fenómenos físicos y las matemáticas pudieran ser aplicadas a los problemas reales. Sin embargo, este valor aparentemente fortuito no se utiliza. Las matemáticas, en los textos de matemática moderna, no se aplican a problemas reales. Algunos autores hacen pequeñas concesiones a las aplicaciones en los cursos séptimo y octavo. Habiendo tranquilizado sus conciencias, ignoran las aplicaciones en cursos superiores.

El aislamiento del mundo real es evidente en los artificiosos problemas que se encuentran en los textos. Además de los ejercicios puramente técnicos que sirven de práctica y que evidentemente no tienen conexión con el mundo real, hay ejercicios cuyo carácter se ilustra a continuación.

Al dividir un cierto número por dos se obtiene el mismo resultalo que multiplicándolo por tres y restando quince. Hallar el número.

Harry gana a la semana tres veces más que Tom, mientras que Dick cobra ochenta dólares a la semana más que Tom. Si Dick y Harry tienen el mismo salario, ¿cuánto gana cada uno de los tres?

Bill tiene el doble de años que Mary. Si tiene exactamente diez años más de los que tenía Mary el año pasado, ¿cuántos años tienen Bill y Mary?

La Cruz Roja teje cincuenta suéteres en diez días. La Cruz Roja juvenil ha contribuido con dos docenas menos que la organización de los mayores. ¿Cuántos suéteres ha tejido la Cruz Roja Juvenil?

¿De qué tamaño es un ángulo cuyo suplementario tiene 21° menos que cuatro veces su complementario?

He aquí un problema «científico»: Según la ley de la reflexión, $i = r$. Siendo $i = (2n+30)°$ y $r = (4n-10)°$, hallar n. No se incluye ni una palabra acerca del significado de la ley de la reflexión. Se podría referir a la reflexión mental.

La artificialidad de estos problemas es obvia. Su necedad e inutilidad harían que cualquier estudiante sensible se retorciera mentalmente de dolor. Desde luego, este tipo de problemas se utilizaban también en el plan tradicional.

A juzgar por las manifestaciones de algunos de los grupos que han elaborado los planes, se podría pensar que al menos en algunos de los nuevos programas las aplicaciones reales habían sido incorporadas e incluso puestas en un primer plano. Por ejemplo, la comisión de matemáticas justificaba en su informe de 1959, *Program for College Preparatory Mathematics*, la necesidad de un nuevo plan, señalando que había muchas nuevas aplicaciones de la matemática en campos tales como la exploración del espacio, la ciencia nuclear, las ciencias sociales, la psicología, los negocios y la industria. Otros grupos se hicieron eco de este pensamiento. Pero ninguna de tales aplicaciones, por no hablar de las aplicaciones físicas tradicionales, ha sido incluida en los planes.

El olvido de las aplicaciones ha sido señalado y lamentado incluso por los abogados de la nueva matemática. Así, el profesor Rosenbloom, un activo trabajador en el nuevo plan, dijo en un artículo sobre matemática aplicada (véase la referencia a Carrier en la bibliografía): «En la redacción de los temas para los grados 9 y 11, algunos quedamos decepcionados de que quienes pensábamos que defendían la introducción de aplicaciones terminasen escribiendo sobre proposiciones abiertas y cosas por el estilo.» Pero las aplicaciones no se han introducido.

Una de las razones de esto es que los profesores y los maestros que redactaron el nuevo plan no conocían la ciencia. Los profesores eran matemáticos puros y los cursos seguidos por los maestros fueron dados en su mayoría por estos profesores, así que los maestros ignoraban también para qué pueden servir las matemáticas. Ambos grupos, por tanto, preferían un tratamiento puramente matemático que les evitaría tener que presentar y explicar unos pocos conceptos físicos y cómo se formulan problemas físicos matemáticamente.

Los modernistas aparentemente también quieren mantener la pureza de las matemáticas. No quieren mancharlas; desean limpiarlas de los residuos de la tierra de la que han crecido. Pero al lavar el mineral se quedan con el hierro y dejar ir el oro. Un dominio perfecto de la lengua es inútil si un hombre no tiene nada que decir, y las matemáticas puras tienen poco que decir a los estudiantes jóvenes. Como dijo Bertrand Russell, «las matemáticas pueden definirse como una materia en la que nunca sabemos de qué estamos hablando ni si estamos diciendo la verdad». Aunque Russell se refería a la estructura lógica de las matemáticas, su afirmación es válida para la enseñanza. El contenido y el espíritu del plan de matemática moderna pueden satisfacer al matemático académico, pero toda relación con el mundo real ha sido ignorada.

Naturalmente, la matemática no es un cuerpo aislado y autosuficiente de conocimientos. Existe sobre todo para ayudar al hombre a comprender y dominar el mundo físico y también, en alguna medida, los mundos económico y social. La matemática está al servico de determinados fines y propósitos. Si no fuese así, no habría lugar para ella en los programas de enseñanza. Si las matemáticas son objeto de gran demanda y se les concede tanta importancia, la razón es que son un instrumento de gran ayuda. Esto debería reflejarse en el plan.

Durante los últimos años muchos de los portavoces del plan han reconocido que no se han puesto de relieve las aplicaciones de las matemáticas. Pero su intento de remediar estas deficiencias ha sido cómico. Han solicitado a especialistas en matemática aplicada de algunos grandes laboratorios de investigación o de organizaciones industriales, que suministrasen ejemplos de aplicaciones. Estos hombres han separado de las aplicaciones reales algunos retazos de matemáticas presentes en ellas. Pero estos retazos no revelan de qué se trata. Son como sal en un pastel. Se pide a los estudiantes que se coman la sal con la esperanza de que, de ese modo, disfruten el pastel.

El aislamiento de las matemáticas ha sido atacado por el doctor Alvin M. Weinberg en su artículo «¿Pero son también ciudadanos los enseñantes?» El doctor Weinberg, director del Laboratorio Nacional de Oak Ridge, denuncia que los profesores están tan absorbidos por sus propias disciplinas que olvidan enseñar a los estudiantes conocimientos útiles, conocimientos que puedan ser aplicados en otros campos, del mismo modo que la matemática se aplica a la física, y conocimientos que les puedan convertir en miembros más útiles de la sociedad. Denomina a las nuevas matemáticas «un monstruo purista».

Presentar las matemáticas como generadas por sí mismas no sólo supone una negación de la historia, sino que oculta sus conexiones vitales con otras ramas del conocimiento. Desde un punto de vista pedagógico este intento es más desafortunado, porque renuncia a la oportunidad y gran necesidad de dar motivación y significado a las matemáticas. Desde el momento en que las ideas matemáticas elementales surgen de problemas físicos y prácticos, estos problemas o sus equivalentes más modernos podrían usarse para motivar el uso de las matemáticas. Ya hemos señalado que el defecto más grave del plan tradicional era su falta de motivación. En vez de remediar este defecto, el plan moderno lo ha agravado. No se puede inducir a los jóvenes para que estudien matemáticas a base de más matemáticas. Los estudiantes que no estén interesados en resolver $x + 3 = 4$, ciertamente no estarán interesados en resolver $x + 4 = 3$.

Aislar a las matemáticas es también privarlas de su significado. Se puede persuadir a los estudiantes para que estudien la función $s = 16t^2$. Pero la función como tal no tiene significado. Físicamente representa el movimiento de caída de una bola. La variable s representa la distancia recorrida en t segundos. Con esta interpretación los alumnos pueden visualizar el incremento de s y t según cae la bola, y con una pequeña ayuda pueden apreciar cómo difiere esta función de $s = 16t$ o de $s = 16t^3$. La apreciación física de cómo varían distintas funciones es de hecho el camino más seguro para lograr la comprensión de la naturaleza y comportamiento de estas funciones.

Las matemáticas se vuelven inútiles y faltas de atractivo si quedan aisladas. Es como enseñarlas en una habitación con espejos en las paredes en vez de ventanas al mundo exterior. Los portavoces de las matemáticas modernas han supuesto que las matemáticas por sí mismas y para sí mismas son atractivas para la gente joven. Pero esto no es verdad. Las matemáticas propiamente dichas se presentan a los ojos de los estudiantes como un enorme e intrincado rompecabezas. Las matemáticas puras pueden proporcionar problemas interesantes, pero también lo hacen el derecho, la economía y la biología, y estas materias resultan mucho más vivas e importantes para los estudiantes. Las matemáticas, a causa de su abstracción, no constituyen un interés humano natural. El hecho mismo de que entre varios centenares de civilizaciones sólo unas pocas hayan dedicado tiempo y esfuerzo a este asunto muestra lo poco natural que éste es.

Los abogados de las matemáticas modernas opinan que los estudiantes pueden encontrar ciertos valores en el estudio de las matemáticas por sí mismas. Uno de los valores que ensalzan es la estructura. Realmente, estructura ha llegado a ser la palabra de moda. Así, el prefacio al curso de álgebra de matrices, preparado por el School Mathematics Study Group, dice «que es esencial el discernimiento de la estructura, no tanto en la apreciación de una pintura o una sinfonía como en el comportamiento de un sistema físico, tanto en la economía como en la astronomía». También en su prefacio al *Teachers Commentary* del curso de álgebra de primer año, este grupo afirma que «el objetivo principal de este primer curso de álgebra es ayudar a los alumnos a desarrollar la comprensión y apreciación de algunas de las estructuras algebraicas que aparecen en el sistema de los números reales, y el uso de estas estructuras como base para las técnicas del álgebra».

¿Qué es exactamente la estructura? Cualquier rama de las matemáticas está formada básicamente por definiciones, axiomas y teoremas. Esta es la estructura en sentido amplio. Sin embargo, las propiedades que se cumplen en una rama no se cumplen en otra. Así, la multiplicación de dos números reales cualesquiera es conmutativa, pero la multiplicación de matrices no. En consecuencia, la estructura lógica de los números reales es diferente de la de las matrices.

¿Qué se puede enseñar a los estudiantes acerca de la estructura? Para los números positivos y el cero (es decir, los números naturales), las propiedades asociativa y conmutativa se cumplen en la suma y la multiplicación. Sin

embargo, no es posible restar 5 de 2 dentro de la clase de los números naturales. De otra forma: podemos decir que 3 no tiene inverso en la clase de los números positivos; o sea, que no hay un número positivo tal que $3 + a = 0$. Por otro lado, en la clase de los números positivos y negativos el 3 posee un inverso, es decir, existe un -3. Entonces el conjunto de los números positivos y negativos posee una propiedad que el conjunto de los números positivos, por sí solos, no tiene. Entonces las dos clases de números difieren en su estructura.

No es posible, en la clase de los números positivos y negativos, dividir cualquier número por otro. Así, en esta clase no existe 1/7. De otra forma: podemos decir que en la clase de los números enteros no existe el inverso de la multiplicación; o sea, que existe un número x tal que $7 \times x = 1$. Por otro lado, en la clase de los números positivos y negativos y de las fracciones, cada número tiene un inverso respecto de la multiplicación. Entonces cada número tiene en esta clase un inverso con respecto a la multiplicación y a la suma, luego la estructura de los números racionales (positivos, negativos y fracciones) es diferente de la de los números enteros.

Puesto que los alumnos de enseñanza secundaria no llegan mucho más allá del uso de los números reales, es decir, de los números racionales e irracionales, no tienen ocasión de estudiar muchas estructuras o la oportunidad de conocer estructuras muy distintas. No pueden ni comparar las similitudes y diferencias de muchas estructuras. Sin embargo, cierto número de defensores de la matemática moderna hacen hincapié en el estudio de la estructura. Además de las citas anteriores tenemos la siguiente afirmación de la comisión de matemáticas en su *Program for College Preparatory Mathematics* (p. 2): «Aunque el punto de vista contemporáneo no desecha las técnicas operativas necesarias para la eficacia del pensamiento matemático, hace especial hincapié en la estructura o forma del sistema y en el pensamiento deductivo.» En el folleto *The Revolution in Schools Mathematics*, publicado por el National Council of Teachers of Mathematics, Kenneth E. Brown, del Departamento de Sanidad, Educación y Bienestar, dice: «La estructura es otro aspecto en que todos los nuevos programas hacen hincapié. Esto se refleja en el cuidadoso desarrollo de las matemáticas como un sistema deductivo.»

No hay nada intrínsecamente equivocado en pretender el estudio de la estructura, aunque se pueda cuestionar su importancia en el aprendizaje de las matemáticas a nivel elemental. Sin embargo, la posibilidad de que resulte significativo el estudio de la estructura es, ciertamente, discutible. Para apreciar las diferencias y similitudes en la estructura de los seres vivos es preciso conocer bien una gran variedad de animales. Quien sólo conozca gatos y perros creerá que todos los animales tienen la misma estructura, y de hecho no se le ocurrirá pensar acerca de la estructura. Quien, por el contrario, conozca jirafas, elefantes, peces y pájaros, encontrará que la estructura puede convertirse en objeto de investigación.

Los estudiantes de enseñanza primaria y secundaria están en la situación de un hombre que sólo conoce a los gatos y a los perros. Es cierto que es posible comparar la estructura lógica de los naturales con la de los enteros, y la de los enteros con la de los números racionales. Sin embargo, mientras el estudiante se está esforzando todavía por comprender estos números y las operaciones con ellos, no está preparado para tener la visión general que requiere la percepción de la estructura. Aunque vislumbre algunas diferencias entre las operaciones posibles con números racionales y las posibles con los enteros, no es probable que asimile el concepto de estructura. Si continúa estudiando matemáticas hasta encontrar álgebras en que la multiplicación no es conmutativa, puede comenzar a darse cuenta de las diferencias de estructura. No es realista esperar que entiendan de arquitectura quienes sólo conozcan perreras y cochiqueras.

Otra razón esgrimida a favor del estudio de la estructura es que éste unifica el cuerpo de las matemáticas al mostrar que todos los teoremas proceden de un conjunto de axiomas y están ordenados en una sucesión lógica. Pero esta faceta de la estructura tiene muy poco valor para los alumnos de

secundaria. En el plan moderno de matemáticas, el álgebra elemental sigue siendo el habitual batiburrillo de temas inconexos que era en el plan tradicional. El hecho de que todos estos temas puedan tratarse a partir de un conjunto básico de axiomas puede darles unidad en la mente del matemático, pero esta unificación o conexión no pueden afectar especialmente a jóvenes que todavía no han aprendido qué es una estructura deductiva.

Los profesores de matemáticas hablan a menudo de dar a los estudiantes conciencia del poder de las matemáticas, y de hacerlo mediante la exhibición de la estructura y el orden presentes en todas sus ramas. Lo que no está claro es en qué forma estos rasgos evidencian el poder de las matemáticas. Para mostrar este poder es preciso usarlas en situaciones reales. De esta forma se aplica su poder y los estudiantes llegan a apreciarlo.

Por tanto, el que los jóvenes estudien la estructura es algo que debe criticarse, independientemente de su importancia mayor o menor, por su carencia de significado a este nivel. Y este mismo hecho implica que no debería ser estudiada a este nivel.

8. EL NUEVO CONTENIDO DE LA NUEVA MATEMATICA

«Con frecuencia la sabiduría está más cerca de nosotros cuando descendemos que cuando nos elevamos.»

William Wordsworth

El plan de matemática moderna incluye el desarrollo lógico como camino para la comprensión, el rigor, la precisión mediante la terminología y el simbolismo, y el énfasis en la matemática por sí misma. ¿Qué temas resultan favorecidos? Todavía se enseñan en el nuevo plan los viejos temas, la aritmética, el álgebra, la geometría euclídea, la trigonometría y los elementos de geometría analítica, a pesar de las opiniones de muchos modernistas de que estas matemáticas anteriores al 1700 están anticuadas y son incluso inútiles en la sociedad moderna. Naturalmente, la proporción de temas tradicionales varía de una versión a otra en los planes de matemática moderna, pero es, desde luego, la parte predominante en todos los casos.

Sin embargo, el nuevo plan presenta algunos contenidos nuevos. Entre los nuevos temas el que más atención ha recibido ha sido la teoría de conjuntos. Se estudia desde el jardín de infancia, como si los estudiantes se fuesen a morir de hambre, mentalmente al menos, a falta de esta dieta. Un conjunto, como dice cualquiera de los textos de matemática moderna, no es más que una clase o colección de objetos. Un conjunto de manzanas, de cubos de basura, de letras del alfabeto inglés y el conjunto de los números naturales son otros tantos ejemplos. El concepto y la pala-

bra *conjunto* son bastante sencillos. Sin embargo, la *teoría de conjuntos* contiene muchos conceptos y teoremas sutiles. Los conceptos básicos son la unión y la intersección de dos conjuntos. Entendemos por unión del conjunto de los objetos rojos y del conjunto de los libros, el conjunto de todos los objetos que o son rojos o son libros. La intersección de dos conjuntos es el conjunto de todos los objetos comunes a los dos. Así, puesto que un libro con las tapas rojas es un objeto rojo, el conjunto de los libros rojos es la intersección de los dos conjuntos. Ahora se puede hablar de la unión e intersección de tres o más conjuntos y de combinaciones de uniones e intersecciones. Habitualmente un conjunto posee subconjuntos. Las sillas rojas serían un subconjunto de todos los objetos rojos. Todo conjunto posee al menos un subconjunto, que es el conjunto vacío. Este conjunto puede ejemplificarse con el conjunto de las mujeres que han sido presidentes de los Estados Unidos.

Los conjuntos más significativos son los conjuntos infinitos. El conjunto de los números naturales es infinito. Se enseña a los estudiantes que dos conjuntos son equivalentes si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre ellos. Por medio de la correspondencia

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \end{array}$$

tenemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números naturales pares, tal que a cada número natural le corresponde el número doble, y al revés. Estos dos conjuntos, y cualquier otro que se pueda poner en correspondencia biunívoca con el de los números naturales, se dice que tienen el mismo número de objetos. Así, hay tantos números pares como números naturales, pese a que aquéllos son una parte de éstos. A los estudiantes se les muestra entonces que el conjunto de los números racionales se puede poner en correspondencia biunívoca con los números naturales, es decir, que hay tantos números racionales como números naturales. También se les enseña que el conjunto de los números reales no se puede poner en correspondencia con el de los números naturales y que el conjunto de los números reales contiene a los números naturales, por lo que es más grande que éste.

Los portavoces de la matemática moderna justifican con varios argumentos la importancia concedida a los conjuntos. El primero es que se trata de un concepto básico en matemáticas. Así, los números son nombres de conjuntos de objetos (aunque la unión y la intersección de conjuntos no sean las mismas operaciones que la suma y multiplicación de los números). El segundo argumento es que el concepto de conjunto unifica varias ramas de las matemáticas. La noción de conjunto se usa para hablar del conjunto solución de las raíces de una ecuación, para definir figuras geométricas y definir relaciones y funciones en términos de conjuntos de pares ordenados de números. La unificación mediante los conjuntos, a nivel elemental por lo menos, se limita a una terminología especial y a una problemática remodelación de definiciones aceptadas y aceptables de los conceptos.

Quizá el segundo tema en popularidad de la matemática moderna sea el de los sistemas de numeración en distintas bases. Este concepto proviene de los babilonios, 2500 años a. de C., que usaban la base sesenta. El concepto fue ampliamente aireado por los famosos matemáticos John Wallis y Gottfried Wilhelm Leibniz en el siglo XVII.

¿Qué es una base? Nuestro método de escribir cantidades utiliza la base diez. Así, 372 significa $3\times10^2+7\times10+2$. La misma cantidad puede escribirse en otra base, ocho, por ejemplo. Como $372 = 5 \times 8^2 + 6 \times 8 + 4$, 372 escrito en base ocho es 564. Se enseña a los estudiantes a escribir números en otras bases y a sumar y multiplicar en ellas. Los modernos computadores electrónicos operan en base dos. Cabría esperar, entonces, que a los estudiantes se les enseñarían las bases de numeración cuando tienen que

aprender algo acerca de computadores. Pero el argumento de los defensores de las matemáticas modernas es que aprender a operar en bases distintas de diez ayuda a comprender la base diez y las operaciones en aritmética.

Un tercer tema común en las nuevas matemáticas es el estudio de las congruencias. Este tema se introduce frecuentemente mediante la llamada aritmética del reloj. Nuestros relojes llegan hasta las doce y después comienzan de nuevo en cero. Es decir, que cuando han pasado veintidós horas desde las doce el reloj no marca 22, sino 10. Esto implica que a todos los números se les restan docenas como sea posible. Veintidós se reduce a diez, y se dice que es congruente con diez en módulo 12. Para hacer los cálculos más simples se les enseña a los estudiantes la congruencia en módulos cinco o seis. Ahora bien, las congruencias no tienen aplicación a la ciencia o la ingeniería. Se enseñan por su interés matemático, y de hecho, el tema pertenece a la teoría numérica, la cual se estudia principalmente por su propio interés. No obstante, es un tema curioso y que puede despertar interés por los números. Se requieren nuevas tablas de suma y de multiplicación. Así, en módulo 6, $4 \times 3 = 0$, ya que si se toma el producto normal, doce, y se sustraen tantos 6 como sea posible, queda cero. Este producto tiene otra característica curiosa, que el producto de dos números puede ser cero aunque ninguno de los factores lo sea.

Otro tema privilegiado en el plan de matemática moderna es el de las desigualdades. Un ejemplo simple sería el hallar los valores de x para los que $3x < 6$. Este tema ha sido enseñado en el *college* durante generaciones, dentro del álgebra tradicional, pero el nuevo plan lo ha incluido en el álgebra de noveno grado.

El School Mathematics Study Group recomienda el estudio de matrices en el segundo semestre del duodécimo grado. Una matriz es una ordenación rectangular de números, habitualmente cuadrada. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

es una matriz y se dice que es de segundo orden porque tiene dos filas y dos columnas. Tales matrices se pueden sumar, restar, multiplicar y habitualmente dividir por otra. También se las puede convertir en matrices con números diferentes multiplicándolas por un número. En otras palabras, existe un álgebra de matrices.

En muchos de los planes modernos se enseña lógica simbólica. En el razonamiento ordinario combinamos afirmaciones de varias maneras. Así se puede decir: «no está lloviendo» y «voy a pasear». Aquí las dos afirmaciones, «no está lloviendo» y «voy a pasear», son proposiciones independientes conectadas por la conjunción «y». Evidentemente, la afirmación simultánea de estas dos proposiciones, p y q es verdad si y sólo si ambas proposiciones son ciertas. Sin embargo, este significado evidente no se acepta como tal, sino que se define mediante lo que se llama una tabla de verdad, que es de la siguiente forma:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

El símbolo $\wedge$ significa «y»; la tabla de verdad nos dice que la afirmación total es verdadera si y sólo si p y q son las dos verdaderas. Se supone que la tabla de verdad es más informativa y más precisa sobre el significado de «y» que el enunciado verbal. Hay tablas de verdad para «o», para la «implicación» y la «negación». Estas tablas de verdad se usan para demostrar teoremas de lógica. De esta manera se demuestra que la negación de la afirmación «No está lloviendo y voy a dar un paseo» puede significar que está lloviendo o que no voy a dar un paseo o ambas cosas.

Se supone que mediante el uso de estas tablas se aprende a razonar.

Muchos textos modernos enseñan álgebra de Boole, a la que también se considera una ayuda para el razonamiento, y que constituye una alternativa al uso de las tablas de verdad. Esta álgebra es igual al álgebra de conjuntos. Por ejemplo, en teoría de conjuntos el conjunto de los perros más el conjunto de los perros es exactamente el conjunto de los perros. En álgebra de Boole, si a representa el conjunto de perros, el enunciado algebraico es $a + a = a$. Si b representa el conjunto de los animales, el enunciado de que todos los perros son animales se expresa por $ab = a$, donde ab significa el conjunto de objetos que están a la vez en a y en b. Usando el álgebra de Boole se pueden expresar los razonamientos ordinarios en forma puramente simbólica.

Los textos de matemática moderna son partidarios de los conceptos abstractos. Antes de que los estudiantes hayan trabajado con funciones se les pide que aprendan qué son relaciones y funciones en términos de conjuntos de pares ordenados (cap. 6). Sólo después de las definiciones generales se deja que los estudiantes aprendan a trabajar con $y = x^2$, $y = x^3$ y similares.

Para conseguir que los estudiantes se habitúen a la abstracción, se les pide que respondan a ejercicios como el siguiente: Si ϕ es una operación con los números positivos, ¿cuál de las definiciones siguientes de ϕ cumple que $x \phi y = y \phi x$?:

a) $x \phi y = y/x$

b) $x \phi y = x - y$

c) $x \phi y = x(x+y)$

d) $x \phi y = \dfrac{xy}{x+y}$

e) $x \phi y = x^2 + xy^2 + y^4$

Lo que realmente se pregunta en este ejercicio es: «¿Para cuál de las ϕ definidas a la derecha de los signos de igualdad se pueden intercambiar x e y sin alterar la expresión?» (La respuesta es *d*.)

Manteniendo su énfasis en la abstracción y la estructura, los textos de matemática moderna introducen las nociones de grupo y cuerpo. Un grupo es cualquier colección de elementos con una operación que cumple varias condiciones. Si a la operación la llamamos suma (aunque puede no ser la suma de los números reales), entonces una condición es que la suma de dos elementos cualesquiera sea otro elemento de la colección. La suma debe cumplir la propiedad asociativa. Debe haber un elemento llamado 0 tal que $a+0=a$ para cada elemento a de la colección. Finalmente, para cada a de la colección debe haber otro elemento de la colección, indicado por $-a$, tal que la suma de a y $-a$ sea 0.

El ejemplo más simple de grupo es el conjunto de los números positivos y negativos con la suma. Sin embargo, la importancia de la noción de grupo reside en que hay muchas colecciones diferentes de elementos, con una operación asociada a cada colección, que forman grupo.

El concepto de cuerpo se aplica a una colección de elementos con dos operaciones, llamadas suma y multiplicación; cada una de estas operaciones debe poseer las propiedades que tienen las operaciones de grupo (excepto la existencia de cero), y las dos operaciones están relacionadas por la propiedad distributiva, es decir, $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$. El ejemplo más simple de un cuerpo es la colección de números racionales (números enteros y fracciones) con las operaciones habituales de suma y multiplicación. Al igual que en el caso de los grupos, hay muchas colecciones de elementos y operaciones que forman un cuerpo.

Se espera que los estudiantes aprendan no sólo los conceptos de grupo y cuerpo, sino las propiedades de estas estructuras no contenidas en sus definiciones. El estudio de estas estructuras abstractas y sus propiedades se situaba dentro del plan tradicional en el tercer o cuarto año de licenciatura, y sólo para quienes se especializaban en matemáticas. En las nuevas matemáticas algunos de estos conceptos se enseñan en la enseñanza primaria, y la cuestión propiamente dicha se estudia en el cuarto año de enseñanza secundaria.

Se pide a los estudiantes que aprendan conceptos abstractos con la esperanza de que si lo consiguen, podrán entender automáticamente sus concreciones. Así, si un estudiante aprende la definición general de función, comprenderá las funciones específicas con las que tendrá que tratar; y si aprende qué es un cuerpo, lo sabrá todo acerca de los números racionales y de otras colecciones que forman cuerpos. Expresándolo en términos de abstracción y concreción, se puede decir que las matemáticas modernas favorecen la abstracción como forma de aproximación a lo concreto.

Ya en los comienzos del movimiento era evidente que iban a destacar las cuestiones abstractas. Por ejemplo, la Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board afirmaba en su informe de 1959 (p. 20): «El objetivo de la enseñanza del álgebra no debería entenderse exclusiva o principalmente como el desarrollo de la capacidad operativa. Antes bien, la educación debería estar orientada hacia el desarrollo y comprensión de las propiedades de un cuerpo de números.» La comisión recomendaba que para el segundo semestre del duodécimo curso se escogiera entre una introducción a las probabilidades, con aplicaciones estadísticas, y una introducción al álgebra abstracta centrada en el estudio de grupos y cuerpos.

Hemos descrito los nuevos contenidos del plan de matemáticas modernas. Se supone que éste corresponde a la necesidad de introducir a los jóvenes estudiantes en la sociedad moderna. Aparentemente también debería resultarles atractivo, porque, como dicen los autores de *The Revolution in School Mathematics* (p. 32), «[El estudiante] quiere saber cómo encajan las matemáticas en su mundo. Y, por fortuna, su mundo está lleno de imaginación y de abstracciones. Así, los estudiantes se interesan por las matemáticas porque les proporcionan un rápido acceso a una aventura intelectual atractiva y satisfactoria.» Aparentemente la imaginación humana no ha muerto.

Revisemos el contenido de las nuevas matemáticas a la luz de las pretensiones del nuevo plan.

Los defensores de las nuevas matemáticas han insistido mucho en que las matemáticas enseñadas en el plan tradicional eran ya conocidas antes de 1700 y en que los estudiantes se aburrían con unas matemáticas tan anticuadas. Sostienen además que la edad moderna requiere unas matemáticas totalmente nuevas. ¿En qué medida es moderno el contenido de la moderna matemática?

Realmente la mayor parte del plan de matemáticas modernas está formado por temas tradicionales. La aritmética, el álgebra, la geometría, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo tradicionales están incluidos en el nuevo plan y formando de hecho su núcleo. Luego no cabe hablar de contenido moderno. La acusación de que el plan tradicional está anticuado se contradice con la confesión de los modernistas de que ellos ofrecen ante todo una nueva interpretación del antiguo plan. A pesar de este hecho, los defensores de la nueva matemática basan su campaña en que la época actual requiere una nueva matemática para aplicaciones tales como la programación lineal, la investigación operativa, la teoría de juegos, el control de calidad, etc. De hecho, en estas aplicaciones se usan las matemáticas tradicionales.

¿Mejoraría el nuevo plan si hubiera abandonado los antiguos contenidos por haber sido creados antes de 1700? ¿Estaría entonces el plan tradicional trescientos años atrasado? Tal clase de argumento puede aplicarse a la historia, pero carece de fuerza cuando se aplica a las matemáticas. La matemática es acumulativa. Lo nuevo se construye sobre lo viejo, y es preciso comprender los antiguos temas si se pretende dominar los nuevos desarrollos. Un plan basado únicamente en las matemáticas posteriores a 1700 no tendría cimientos.

No se puede defender todo lo antiguo. Ya hemos señalado (en el capítulo 2) que la resolución logarítmica de triángulos, tema predilecto de la trigonometría tradicional, ha perdido su importancia. Puede ser dado de lado. Sin embargo, es muy poco lo que en el plan tradicional puede considerarse envejecido o sin uso actual. Las matemáticas han sido comparadas a un gran árbol que da siempre nuevas ramas y hojas y que sin embargo conserva el mismo fuerte

tronco de conocimientos establecidos. El tronco es esencial para la vida de todo el árbol.

Sin embargo, el nuevo plan sí incluye algunos temas nuevos. Al evaluar estos temas nuevos debemos tener presente que los estudiantes de enseñanza primaria y secundaria no saben a qué van a dedicarse en la vida. Incluso los pocos que lo piensan pueden cambiar varias veces de idea. Por tanto, los diferentes cursos de matemáticas que se den deberían ser útiles para las distintas carreras que los estudiantes puedan emprender.

El nuevo tema al que se concede importancia en la matemática moderna es la teoría de conjuntos. No hay duda de que la palabra «conjunto» es útil. En el sentido habitual, no técnico, significa colección, clase, grupo y cosas parecidas. Sin embargo, como ya hemos señalado, se pide a los alumnos que estudien la unión e intersección de conjuntos, los subconjuntos, el conjunto vacío, los conjuntos infinitos, las correspondencias biunívocas entre conjuntos infinitos y otros conceptos. Todo esto es un total despilfarro de tiempo. En las teorías matemáticas muy avanzadas y complicadas, la teoría de conjuntos juega un papel, pero en las matemáticas elementales no juega ninguno. De hecho es casi seguro que la teoría de conjuntos se incluyó en las matemáticas modernas más para darles aspecto de ser complejas y avanzadas que por su utilidad. Sucede que es uno de los pocos temas de la matemática superior que se puede presentar sin una excesiva preparación previa, y sin duda es uno de los pocos temas de matemáticas avanzadas que los creadores del plan de matemática moderna podían comprender.

Una vez que han introducido la teoría de conjuntos, los creadores del plan debían usarla. Para ello inventaron una terminología y unas definiciones. Si se habla del «conjunto solución de $x + 2 = 4$», en vez de los valores de x para los cuales $x + 2 = 4$, se usa el lenguaje de los conjuntos. Se habla de un triángulo como «la unión de tres puntos no alineados y de los segmentos que los unen», en vez de hablar de tres puntos no alineados y los segmentos que los unen. El punto de intersección de dos líneas se describe como la intersección de dos conjuntos lineales. Las funciones, como señalamos antes, son conjuntos de pares ordenados. Esta definición de función es particularmente desafortunada. Lo importante acerca de una función, por ejemplo $y = x^2$, es que al variar x, varía y, y que los valores de y dependen de los valores de x. Este significado de la función queda oculto en su definición como un conjunto de pares ordenados. De hecho, el conjunto de pares es infinito, y no puede ser ordenado por la mente para ver el importante concepto de variación. Por tanto, estas aplicaciones de la teoría de conjuntos distorsionan los conceptos básicos.

El profesor Feynman, cuyas críticas a los libros de texto que se usan en California ya hemos citado, dice que «en casi todos los libros de texto que tratan sobre conjuntos, éstos no llegan a utilizarse para nada, ni se llega a explicar por qué el concepto posee interés o utilidad especiales. Lo único que se nos dice es que "el concepto de conjunto es muy familiar". Realmente esto es cierto. La idea de conjunto es tan familiar que no comprendo la necesidad de una paciente discusión del tema, una y otra vez, por distintos libros de texto, sin que al final se usen los conjuntos para nada».

El papel de la teoría de conjuntos en las matemáticas puede ser digno de atención porque nos da alguna indicación de cómo se han interpretado las matemáticas en el plan de matemática moderna. Este papel puede entenderse mediante una analogía. Supongamos que, a causa de la general insatisfacción respecto a la producción de músicos de nuestro país, se decidiera cambiar la enseñanza de la música. Un grupo de educadores podría argumentar que no hemos logrado hacer progresos en música porque todavía estudiamos a Beethoven, a Bach y a Brahms. En su lugar deberíamos estudiar música moderna. Es más, deberíamos estudiar los fundamentos físicos de la música. Ahora bien, los fundamentos físicos de la música son la física de los sonidos, de los sonidos musicales en particular. Entonces a los estudiantes de música se les enseñaría primeramente la teoría de los sonidos en vez de enseñarles a interpretar música, a oír música y a apreciar las grandes composiciones del

pasado. Naturalmente, se podría mantener que la física de los sonidos musicales es un tema valioso por sí mismo. Esto es verdad. Pero el dominio de este tema, incluso suponiendo que pedagógicamente sea accesible a los jóvenes, no producirá músicos.

Se puede usar el mismo argumento respecto a la enseñanza de la pintura. Se puede enseñar la teoría de los colores y formar expertos en ese tema. Pero estos expertos pueden no ser capaces de dar una pincelada, al menos contando con sus conocimientos sobre los colores.

De forma análoga, la teoría de conjuntos no tiene ninguna utldad para comprender la matemática elemental o para aprender a trabajar con ella, aunque constituya el fundamento lógico de un planteamiento complejo y riguroso de las matemáticas.

De hecho la teoría de conjuntos puede causar desorientación incluso en el contexto en que se supone que es de más ayuda, es decir, en el estudio de los números. Lo más que los modernos textos pueden decir acerca de la relación entre números y conjuntos es que un número es la propiedad o nombre de un conjunto. Esto, en sí mismo, es tan vago que resulta inútil como definición de número. Pero la situación es peor aún. Dados dos conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{3, 4, 5\}$, la unión de estos dos conjuntos es el $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, el cual sólo contiene cinco objetos. Pero si sumamos el número de objetos del primer conjunto al número de objetos del segundo conjunto el resultado es 6. Igualmente, la intersección de los dos conjuntos originales es el conjunto $\{3\}$. Pero el producto de los números correspondientes a los dos conjuntos es 9. Luego las dos operaciones básicas entre conjuntos, unión e intersección, no se corresponden con la suma y la multiplicación de los números representados por los conjuntos.

Un examen crítico del uso de la teoría de conjuntos en los textos de enseñanza primaria y secundaria refuta el argumento de que la teoría de conjuntos unifica las matemáticas. No se hace un uso importante de la teoría, con excepción de su utilización artificial, para definir conceptos. El tema se abandona de hecho en los desarrollos posteriores y solamente se mantiene la terminología. Naturalmente la teoría de conjuntos arroja resultados importantes, pero incluso los modernistas reconocen que éstos caen fuera de la esfera de las matemáticas elementales. En este sentido podemos comparar la teoría de conjuntos con la geometría elemental. Los axiomas de la geometría deben parecer inmediatamente evidentes al estudiante cuando se estudian por primera vez, y en este aspecto la geometría y la teoría de conjuntos comienzan a la par. Pero casi antes de darse cuenta de que están haciendo algo de envergadura, los estudiantes obtienen en geometría resultados sorprendentes y excitantes. A partir de axiomas aparentemente simples, y mediante el modo deductivo de razonamiento, surgen resultados tan interesantes e inesperados como el de que las medianas de un triángulo se cortan en un punto, al igual que las alturas, las bisectrices y las mediatrices, y no sólo para un tipo de triángulo, sino para todo triángulo. Para un estudiante con sensibilidad matemática, tales resultados aparecen como una revelación inolvidable de la potencia del razonamiento matemático abstracto. No hay nada comparable. En el tratamiento rudimentario que de la teoría de conjuntos se hace en el nuevo plan de matemáticas no hay nada comparable a esto.

En las matemáticas elementales la teoría de conjuntos es un formalismo hueco que obstaculiza ideas que son mucho más fáciles de comprender intuitivamente. La justificación de su introducción es casi ridícula y supone una parodia de la pedagogía. La teoría de conjuntos no ha resultado el elixir de la pedagogía matemática.

La importancia otorgada a la teoría de conjuntos ha provocado críticas caústicas. Una muestra podría ser la siguiente: «Un autor exige que los estudiantes participen activamente en una aventura de aprendizaje de conceptos. ¿Y cuál es esta aventura? Los estudiantes dan al profesor sus propios ejemplos de conjuntos. Comienzan con conjuntos de cosas similares; pero la aventura alcanza pronto el punto en que se pueden considerar conjuntos tales como "la nariz del notario, la luna y el número 4". Los estudiantes han sido llevados con gran destreza pedagógica a la pasmosa conclusión de que cualquier colección de cosas es una colección.»

Otro crítico fue igualmente severo: «Oh, veamos, Johnny tiene un conjunto de canicas. Mirad, mirad, Billy tiene un conjunto de canicas. Veamos el conjunto de Billy. Aquí viene Mary. Mary coge todas las canicas. Mary tiene la unión del conjunto de Johnny y del de Billy. Veamos la unión de Mary.»

El segundo de los nuevos temas incorporados en las nuevas matemáticas es el de las bases de los sistemas de numeración. Como ya hemos señalado, este tema no es históricamente nuevo, ni es nuevo en la enseñanza de las matemáticas. Varias generaciones lo han estudiado en el álgebra del *college*. Luego lo único que es nuevo es que el tema ha sido introducido en la enseñanza primaria. El argumento es que los estudiantes comprenderán mejor la habitual base diez en que se escriben los números, si aprenden a escribirlos en cualquier base.

Los problemas pedagógicos son a menudo difíciles de resolver. Una buena analogía de la enseñanza prematura de las bases de numeración sería quizá la de la enseñanza del francés a estudiantes que aún no dominaran su propio idioma. ¿Lo aprenderían mejor así? Es más probable que la enseñanza simultánea de dos lenguas produzca confusión. Se puede perfeccionar y profundizar el conocimiento del propio idioma aprendiendo francés, pero esto se logra mejor después de que se ha conseguido un dominio razonable del propio idioma. Otra analogía podría ser la de aprender a tocar el piano y el violín simultáneamente.

Otro de los argumentos más frecuentes a favor de la introducción de las bases es que las modernas calculadoras electrónicas usan la base dos. Las calculadoras usan la base dos, luego sería más interesante enseñar la base dos cuando los estudiantes comenzaran a aprender a usar computadores, no en la aritmética de segundo, tercer o cuarto grado.

La congruencia es el tercero de los nuevos temas. Podemos recordar que hace referencia a la aritmética de módulo doce, cinco o seis. Este concepto no tiene aplicación a nivel elemental. Puede interesar a los estudiantes, pero a expensas de cosas más importantes y quizá igualmente interesantes. No parece haber nada que haga recomendable este tema para el nivel elemental, excepto su novedad.

Las desigualdades —otro de los temas característicos en los textos de matemática moderna—, como las bases, se enseñaban normalmente en el álgebra a nivel de *college*, y lo único que se ha hecho ha sido trasladar este tema a la enseñanza secundaria. Es muy poco lo que se puede hacer con este tema a nivel de la enseñanza secundaria. Incluso cuando se enseñaba en el *college* se tardaba algo en hacer uso de él. De aquí que tenga menos sentido aún enseñarlo a un nivel inferior.

Otro de los temas nuevos, el álgebra de Boole, es similar a la unión y a la intersección en teoría de conjuntos. Ante todo, es un paso hacia la lógica matemática. Se defiende su enseñanza a nivel de enseñanza secundaria, en base a su uso en el diseño de circuitos de conexión, especialmente en los computadores. Esta defensa parece débil en vista de que los estudiantes de enseñanza primaria y secundaria no saben qué carreras seguirán, así que la educación a estos niveles debería ser más general que preprofesional. ¿Cuántos estudiantes de enseñanza secundaria diseñarán circuitos de conexión a lo largo de su vida?

Otro tema más del plan moderno es la lógica simbólica. Hay muchas razones para que no se les enseñe a los jóvenes. La creencia de que los símbolos explican los conceptos o las ideas parece ser predominante, pero no por ello es menos falsa. Se supone que el significado de la afirmación conjunta de dos proposiciones, tales como «Está lloviendo y voy a dar un paseo», queda aclarado e incluso definido mediante una tabla de verdad. Esto es poner el carro delante del caballo. ¿Cómo se ha obtenido la tabla de verdad? Evidentemente, tenemos que saber antes que la afirmación conjunta de dos proposiciones es verdad si y sólo si ambas son verdad. Entonces podemos construir la tabla de verdad. Todo intento de razonar mediante las tablas de verdad es ineficaz, torpe e incluso desconcertante. Ni los matemáticos ni los abogados razonan de esa forma. Y ningún matemático, excepto los especialistas en el tema, usa la lógica simbólica. Por el contrario, todo matemático piensa intuitivamente y luego presenta sus argumentos en forma deductiva usando palabras, símbolos matemáticos familiares y lógica ordinaria. Recurren a la lógica simbólica los especialistas en problemas de base, que deben ocuparse de las imprecisiones y ambigüedades del lenguaje ordinario. Pero incluso ellos comprenden intuitivamente qué quieren decir y expresan después sus pensamientos mediante símbolos especiales. La lógica simbólica no controla ni dirige el pensamiento; es simplemente la más compacta expresión escrita del pensamiento real. Es preciso asegurarse de que los símbolos expresan lo que deseamos, sin confiar en que los símbolos nos aclaren qué queremos decir. No solamente la mayor parte de los matemáticos no usan la lógica simbólica, sino que aquellos que la usan piensan realmente en lenguaje ordinario.

Uno de los temas recomendados para el duodécimo grado, y que está bastante extendido, es una introducción al álgebra abstracta. En este curso, en muchos textos se hace hincapié en las matrices, cuya naturaleza describimos antes. Hay un álgebra general de matrices con la que se enseña a los estudiantes a sumar, restar, multiplicar y dividir matrices, así como otras muchas operaciones. Sin embargo, las matrices son formas abreviadas de lo que se llama transformaciones, y los estudiantes, a nivel del duodécimo grado, no tienen antecedentes de qué significan y para qué se usan las transformaciones. Por tanto, aprenden a usar las matrices sin ninguna finalidad, y no pueden ver ningún sentido en lo que hacen porque no conocen el contexto en el que se usan las matrices. El uso de las matrices se convierte entonces en una serie de tareas mecánicas, tan mecánicas como la enseñanza tradicional del álgebra, que tan justamente ha sido criticada. El álgebra de los números ordinarios es, al menos, un paso necesario para progresar en las matemáticas elementales; y aunque no es posible defender ningunas matemáticas que carezcan de sentido, tiene alguna justificación la enseñanza del álgebra de los números ordinarios a los estudiantes de bachillerato. No hay justificación para el estudio de las matrices a nivel del duodécimo grado.

Otra parte del curso recomendado de álgebra abstracta es el estudio de grupos y cuerpos. Ya hemos explicado que éstos constituyen formulaciones abstractas de otras álgebras más concretas. Las versiones abstractas se reducen al estudio de las estructuras comunes a los casos concretos. Contra la enseñanza de tales estructuras se puede argumentar simplemente que es prematura. También se podría intentar enseñar la estructura de todas las lenguas —todas tienen características comunes— a un niño que no dominara todavía su propia lengua. Una vez que un estudiante ha aprendido las álgebras de los números reales, de los números complejos, de las funciones racionales, matrices, vectores, transformaciones y congruencias, puede interesarle saber si estas álgebras tienen o no características comunes. Entonces se podrá demostrar un teorema sobre grupos y el teorema se aplicará a todas aquellas álgebras concretas que formen grupos. En otras palabras, merece la pena demostrar el teorema abstracto de una vez por todas cubriendo de un golpe muchos casos especiales. Sin embargo, las abstracciones no tienen significado si no van precedidas de un conocimiento efectivo de álgebras específicas, y la ventaja de demostrar un teorema general para un álgebra abstracta no puede afectar a quien solamente conoce un ejemplo de grupo o cuerpo, y además lo conoce imperfectamente.

El interés de una formulación abstracta es que unifica y revela las propiedades comunes a ramas concretas y familiares de las matemáticas. Por tanto, en el desarrollo de las matemáticas la abstracción no es el primer paso, sino el último. Puede clarificar solamente aquellas estructuras concretas que son ya bien conocidas. Unifica sólo aquello que ya conocemos. Sin un amplio conocimiento previo de los casos concretos, los conceptos abstractos permanecen vacíos, arbitrarias criaturas de la fantasía matemática. Enfrentar a los estudiantes más jóvenes con abstracciones que están por encima de su nivel de madurez, sólo produce confusión y rechazo, pero no incrementa el conocimiento. En pocas palabras, los conceptos más abstractos no pueden utilizarse a nivel elemental.

Hay otra objeción contra la enseñanza prematura de estructuras abstractas. Es cierto que los números racionales, los reales y los complejos tienen estructura de cuerpo. Es decir, que la suma, el producto, la diferencia y el cociente de dos números racionales cualesquiera es un número racional y lo mismo sucede con los números reales y los complejos. Por tanto, se podría argumentar que los estudiantes poseen tres ejemplos concretos de cuerpo. ¿Debería entonces enseñarse tempranamente el concepto de cuerpo? La respuesta sigue siendo no, porque las propiedades de cuerpo son aquellas que son *comunes* a todos estos sistemas de números, así que borran automáticamente cualquier característica que los distingue. Pero las operaciones con números racionales son diferentes de las operaciones con números reales y éstas son diferentes de las operaciones con números complejos. Así, el producto de las fracciones 3/4 y 7/8 es 21/32, el producto de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ es $\sqrt{6}$, y el producto de $2 + 3i$ y $4 + 5i$ es $-7 + 22i$. Hasta que el estudiante pueda al menos operar fácilmente con números racionales y reales, tiene poco sentido enseñarle que $a \times b = b \times a$ es una propiedad de los cuerpos. Un estudiante que conociera perfectamente las propiedades de un cuerpo podría no saber devolver el cambio en una tienda de ultramarinos, mucho menos llevar un libro de caja. No olvidemos que es más vacío un concepto matemático cuanto más general es.

Dicho de otra manera, los cuerpos no explican los distintos tipos de números ni las operaciones que se hacen con ellos. De hecho sucede justamente al revés. La buena comprensión de varios sistemas de números aclara el concepto de cuerpo. Por tanto, carece de base el argumento usual de que es útil enseñar tempranamente el concepto abstracto porque da cuenta de varios casos concretos a la vez. Por lo que concierne a la utilidad, el tiempo que se emplea en enseñar conceptos abstractos es tiempo perdido. Cuando advertimos que quizá el cincuenta por ciento de los estudiantes que ingresan en el *college* no saben sumar ni multiplicar fracciones, especialmente con letras, resulta evidente en qué se debe hacer hincapié.

Psicológicamente la enseñanza temprana de abstracciones constituye un error. Una completa comprensión de lo concreto debe preceder a la abstracción. Los conceptos abstractos no tienen sentido a menos que se tengan bien presentes diversas interpretaciones concretas. Las abstracciones prematuras caen en oídos sordos.

En sentido estricto no es posible enseñar una abstracción. La dificultad para el estudiante sería análoga si se le diera una definición de perro biológicamente correcta y luego se le presentaran como ejemplos un caniche y un pastor. Si se le enseñara un bull-terrier y se le preguntara si aquello era un perro, el estudiante podría quedar desconcertado. La definición biológica contiene tantos términos extraños y técnicos que no podría comprenderla; y si pudiera, no sabría aplicarla.

Las abstracciones deben nacer en la gente. No es posible enseñarlas *ex cátedra.* Conforme aumenta la experiencia de la gente en las distintas variedades de relaciones funcionales y en sus peculiaridades, advierten el gran número de situaciones que tienen en común una idea básica; en este momento será esclarecedor señalarles esta idea común. También podrán valorar las diversas condiciones o cualidades que deben incluirse en una definición general.

Empezar con un concepto general y luego usarlo sólo en casos especiales, como es habitual en la matemática moderna, es pedagógicamente absurdo por otra razón. Se puede enseñar a un niño de seis años algo sobre los perros, de manera que pueda jugar con ellos y, al mismo tiempo, ser precavido. ¿Se debería empezar con la definición biológica? Prescindiendo de si la definición tendría significado para un pequeño, deberíamos preguntarnos si le ayudaría a conocer a los perros. ¿No sería más práctico que el chico aprendiera acerca de los perros que encontrara a su alrededor? Así sucede con los conceptos matemáticos. La definición general de una función es inútil en tanto que el objetivo inmediato sea aprender acerca de $y=3x$, $y=3x+7$, $y=x^2$, y funciones parecidas. De hecho, la definición general

carga al estudiante con un misterio que nubla todo su pensamiento ulterior. Un año o dos después de aprender una definición aplicable a casos simples solamente, podrá necesitar una definición de función un poco más amplia, por ejemplo, cuando encuentre funciones de dos o tres variables. Incluso entonces la definición general es inútil. Basta con ampliar el término función para que incluya, por ejemplo, $z = x^2 + y^2$.

La mente humana no opera en las matemáticas de forma distinta que en política o en sociología. Se puede predicar la hermandad de los hombres, pero esto no lleva a la gente a comprender y practicar la hermandad. El enseñar a los niños a convivir con otros de diferentes razas y credos, y a respetarlos, puede lograr esta hermandad, pero el principio ético general no les afectará. Los estudiantes a quienes se les han enseñado abstracciones antes de que hayan adquirido la rica experiencia que lleva de hecho a aquellas abstracciones, pueden adquirir algunos conocimientos superficiales y usar las palabras adecuadas. Pero no se puede decir que comprendan realmente estas abstracciones.

La preferencia de los matemáticos modernos por la abstracción nos recuerda un cuento. El director de una escuela alardeaba de apreciar mucho a sus estudiantes y de preocuparse por su salud. Un día vio a un estudiante caminando por una acera en la que se acababa de echar hormigón. Se lanzó violentamente sobre él y lo arrastró fuera del hormigón fresco. Un profesor que vio el incidente recordó al director su supuesta preocupación por los estudiantes y le reprochó que tratara tan rudamente al muchacho. El director replicó: «Me gustan los estudiantes en abstracto, pero no en concreto» *.

Los abogados de las nuevas matemáticas tratan de responder a la acusación de excesiva abstracción, citando al psicólogo Jerome S. Bruner, de Harvard, que dijo: «Cualquier tema se le puede enseñar, en forma intelectualmente honesta, a cualquier niño en cualquier nivel de desarrollo.»

* Se trata de un juego con la palabra *concrete*, que puede significar «lo concreto» y «el hormigón». (*N. del T.*)

La característica salvadora de esta tesis es su vaguedad. Dejando de lado la cuestión de si se debe dar prioridad a las abstracciones particulares en que un grupo puede estar interesado, cabe preguntarse cómo se podría presentar lá sustancia de la *Crítica de la razón pura* de Kant a los estudiantes de secundaria. Lo que puede pasar y lo que pasa cuando se toma demasiado en serio la tesis de Bruner es que los estudiantes aceptan las abstracciones dócilmente, con tan poca comprensión y capacidad crítica como los niños cuando aprenden el catecismo.

El cuadro total que ofrecen los nuevos temas en el plan moderno no es muy grandioso. Algunos temas, como las bases y las desigualdades, han sido traídos simplemente de los niveles superiores en que previamente se enseñaban sin ningún beneficio y con muchos inconvenientes. Otros, como las congruencias, son novedades inútiles a nivel elemental. Otros, como el álgebra de Boole y la lógica simbólica, son especialidades que deberían reservarse a los especialistas. Y finalmente, los temas más avanzados, la teoría de conjuntos, las matrices y el álgebra abstracta, parecen haber sido escogidos deliberadamente para mostrar que el plan ha puesto al día las matemáticas superiores —aunque por lo demás estos avances no tengan sentido ni cumplan ninguna función en la educación de los chicos—. En lo que concierne a los temas más avanzados, «los reformadores» parecen tener la impresión de que todo lo que huele a matemática moderna es matemática moderna, como los niños pequeños que creen haber crecido cuando se ponen pantalones largos.

Aunque varios matemáticos capaces y muy preparados han participado en la preparación de las distintas versiones de las nuevas matemáticas, sus contribuciones han quedado muy diluidas. Las nuevas matemáticas, como un todo, corresponden al punto de vista del matemático superficial, que sabe apreciar solamente pequeños detalles deductivos y distinciones estériles y pedantes como aquella entre número y numeral, y que pretende realzar lo trivial con una terminología y un simbolismo impresionantes y sonoros. Se nos ofrece una versión abstracta y rigurosa de la matemática, que oculta su rica y fructífera esencia y hace hincapié en generalidades poco inspiradoras, aisladas de todo otro cuerpo de conocimiento. Se subrayan sofisticadas versiones finales de las ideas simples, mientras se tratan superficialmente las ideas más profundas, lo que conduce necesariamente al dogmatismo. El formalismo de éste plan solamente puede conducir a una disminución de la vitalidad de las matemáticas y a una enseñanza autoritaria, al aprendizaje mecánico de nuevas rutinas, mucho más inútiles que las rutinas tradicionales. Resumiendo, pone de relieve la forma a expensas de lo sustancial y presenta lo sustancial sin pedagogía ninguna.

Quizá la crítica más decisiva de los programas de matemática moderna la hizo inconscientemente un profesor que estaba satisfecho con ella e intentaba que sus observaciones fueran una alabanza: «Si vamos a suspenderles [a los estudiantes] en matemáticas, por lo menos les suspenderemos en unas buenas matemáticas.»

Cuando se critica el programa de matemática moderna, a menudo sucede que nuestro interlocutor, tratando de ser amable y no sabiendo a qué carta quedarse, señala que sin duda la verdad está a medio camino entre la matemática tradicional y la moderna. Este tipo de compromiso puede ser correcto en algunas controversias, pero no es aplicable aquí. Si una persona afirma que la tierra gira de este a oeste y otra que gira de oeste a este, no es posible llegar a un compromiso, por muy bien intencionado que sea, diciendo que la verdad está a medio camino entre estas alternativas. Como veremos más adelante en el capítulo 11, la verdadera reforma es diametralmente opuesta al camino tomado por la matemática moderna y se encuentra, por decirlo así, en la otra «cara» de la matemática tradicional.

9. EL TESTIMONIO DE LOS EXAMENES

> *«He aquí que el nombre de Ben Adhem traía consigo todo lo demás.»*
>
> *Leigh Hunt*

A pesar de todas las críticas aparentemente válidas para ambos planes de matemáticas, tradicional y moderno, se echa de menos un criterio más objetivo para determinar si un programa es más conveniente o mejor que el otro. Cabría pensar que los creadores de los planes modernos de matemáticas habrían experimentado con numerosos grupos de niños y profesores, obteniendo así alguna evidencia a favor de su programa antes de recomendarlo a todo el país. El triste hecho es que la mayor parte de los grupos no emprendieron casi ningún trabajo experimental. La única excepción significativa fue el Committee on School Mathematics de la Universidad de Illinois, dirigido por el profesor Max Beberman. E incluso este grupo nunca presentó pruebas de la superioridad de su plan.

A partir de 1952, y durante algunos años, Beberman comenzó a experimentar con clases de enseñanza secundaria en la Universidad de Illinois. También preparaba profesores para enseñar el nuevo programa en otros centros y estaba dispuesto a pasar varios años poniendo a prueba su programa. Pero hacia 1955 entró en escena la Commission on Mathematics, anunciando lo que defendería en su informe final de 1959. En 1958 se organizó el School Mathematics Study Group (SMSG). Durante el verano de 1958 se redactaron catorce de los temas experimentales para séptimo y octavo grado. Unos cien profesores de doce centros ensa-

yaron estos temas durante el curso 1958-59. Durante el verano de 1959 se introdujeron en ellos algunos cambios. Para entonces los grupos de trabajo del SMSG habían completado los textos para los grados séptimo a duodécimo. Estos textos fueron usados experimentalmente durante el curso 1959-60, y revisados durante el verano de 1960. El SMSG comenzó sin más a colocar el plan por todo el país. Al ver a éstos y a otros competidores suyos dispuestos a lanzar al mercado sus productos, el profesor Beberman pensó probablemente que su trabajo se perdería en la avalancha y comenzó una activa campaña en favor de su versión del plan de matemática moderna. Desde este momento, el trabajo experimental desapareció prácticamente y la lucha para asegurarse el predominio desplazó a cualquier otra actividad.

El National Council of Teachers of Mathematics, que había puesto a punto un plan propio a través de su Secondary School Curriculum Committee, organizó durante el primer semestre de 1960 ocho conferencias regionales en varios lugares de Estados Unidos. El propósito de estas conferencias era dar a los administradores y a los supervisores en matemáticas de los centros información que les permitiera introducir uno de estos «nuevos y mejorados» programas de matemáticas. En otras palabras, la edad de oro había llegado y el país estaba invitado a regocijarse y participar en él. El folleto *The Revolution in School Mathematics,* publicado en 1961, relataba lo que se discutió durante la conferencia de 1960 y decía en su prefacio: «Ahora tenemos la posibilidad de hacer un esfuerzo concertado hacia un rápido mejoramiento de las matemáticas escolares. Su forma general está clara y los materiales de enseñanza necesarios están disponibles... Consideramos cada uno de los nuevos programas como una muestra de un plan de matemáticas mejorado que merece la atención de todos los interesados en idear mejores programas de matemáticas.» Así, en 1960 —habiéndose centrado los esfuerzos casi por completo en la redacción de los temas, mientras los tests habían sido prácticamente ignorados— los nuevos planes se extendieron por el país.

El profesor Edwin E. Moise, que había participado en el trabajo de redacción del SMSG y dado conferencias a favor de este plan de matemática moderna, testificó inconscientemente su falta de experimentación. En su artículo, incluido en el folleto *Five Views of the New Math* (publicado por el Council for Basic Education), Moise dijo: «Sin embargo, una cosa fue evidente, tan pronto como los libros fueron escritos y antes de que fueran probados: la ganancia en contenido intelectual era tan grande que podían producir o bien una mejora en la educación o un colapso de la moral de la clase.»

¿Qué tipo de evidencia objetiva nos permitiría establecer la superioridad de cualquier plan? Casi inmediatamente se piensa en los exámenes. Pero se debe ser cauteloso con el significado de los exámenes de matemáticas. Los cursos de matemáticas deberían enseñar a los estudiantes a plantearse problemas, a encontrar los resultados ellos mismos y a comprender los conceptos y demostraciones que han aprendido. Realmente los exámenes no valoran esto, y en gran medida no pueden hacerlo. Los exámenes habituales exigen que un estudiante responda a una buena cantidad de preguntas en un tiempo limitado. Una pregunta que plantee realmente un nuevo tipo de problema o conduzca a un nuevo resultado requerirá demasiado tiempo para que el estudiante medio pueda responderla correctamente en el tiempo permitido. Incluso aunque el estudiante haga esfuerzos inteligentes y significativos para responder una pregunta semejante, la falta de resultados positivos se traducirá probablemente en una calificación baja o nula.

Por tanto, los exámenes de matemáticas, habitual y casi forzosamente, exigen hacer uso de información anteriormente aprendida que ahora simplemente se reproduce. La principal facultad que miden los exámenes es la capacidad para aprender de memoria. Aunque la adquisición de información es un objetivo de la educación matemática, se supone que no es el único ni el más importante. Si bien la mayor parte de los profesores niegan que sus exámenes sean pruebas de memoria, su comportamiento contradice sus palabras. En el capítulo 2 señalamos que los profesores no

permiten a sus alumnos usar libros durante los exámenes. Pero si los exámenes requieren que el estudiante piense, ¿en qué les puede afectar el uso de libros?

Supongamos, sin embargo, que para conseguir datos objetivos debamos recurrir a los exámenes mejor que a las opiniones de los profesores, y supongamos, además, que los exámenes arrojen resultados positivos. Aun así deberemos ser cautelosos sobre lo que los resultados significan, particularmente en el caso del movimiento de matemática moderna.

En la mayor parte de los centros el plan de matemáticas modernas se ofrece a los mejores alumnos. De hecho, muchos de los introductores de las matemáticas modernas consignan ahora explícitamente que este programa se pensó para los estudiantes capacitados y destinados a llegar al *college*. Está claro que estos estudiantes responderán mejor que la media.

También es verdad que la gran mayoría de los profesores de cursos de matemática moderna tiene motivos para hacer mejor su trabajo. Hay varias razones para ello. Son los profesores más capaces y más emprendedores los que desean ensayar nuevos temas. Algunos reciben sobresueldo, u otros beneficios, por experimentar o enseñar a otros profesores a explicar matemáticas modernas. Otros han sido convencidos por los artículos que defienden la matemática moderna de que ésta representa un mejor programa, y responden al reto que supone su explicación. Finalmente, muchos profesores han participado en la elaboración de una u otra versión del moderno plan y están decididos a demostrar que es superior. Cuando además estos profesores dicen a los estudiantes que han sido especialmente escogidos y que están participando en un gran experimento, los estudiantes responden habitualmente a tales cumplidos haciendo un esfuerzo adicional. Ciertamente, los estudiantes a los que se enseña bajo alguna de estas condiciones responderán mejor. Incidentalmente, el efecto conseguido haciendo creer a los estudiantes que son la clave de un experimento importante se conoce como efecto Hawthorne.

Los exámenes han sido hechos en pequeños grupos por profesores y redactores del plan que son partidarios de las matemáticas modernas. Habitualmente el resultado de las evaluaciones es que los estudiantes han aprendido los nuevos temas y además dominan las técnicas de la matemática tradicional en la misma medida que los estudiantes a los que sólo se ha enseñado ésta. Este tipo de evaluaciones resulta sospechoso. Además de las razones previamente citadas, hay otros factores para discutir los resultados de los exámenes. Estos no están normalizados; por tanto, es muy fácil para el profesor orientar las preguntas de tal modo que sea mínimo el conocimiento de la matemática tradicional requerido. Además, los resultados de cualquier examen requieren una interpretación. Supongamos que las preguntas que se refieren a temas tradicionales hayan sido usadas para examinar a cien mil estudiantes con un rendimiento del 60 por 100. El grupo examinado particularmente podría arrojar un rendimiento del 70 por 100 en los temas tradicionales. ¿Ha respondido mejor este grupo? No necesariamente. Este pequeño grupo puede estar formado por los mejores estudiantes y podría haber obtenido un 70 por 100 en el examen hecho a los cien mil estudiantes. Además, si este grupo hubiese estudiado solamente matemáticas tradicionales podría haber alcanzado un 90 por 100 de nota media en los temas tradicionales. ¿No se podría examinar la inteligencia en general de este pequeño grupo de tal manera que se la pudiera comparar con la de los cien mil estudiantes? Cualquier intento de hacerlo suscita el problema de la fiabilidad de los tests de inteligencia. Sabemos muy poco acerca de lo que es la inteligencia y de cómo examinarla.

El cuadro de lo conseguido en los cursos de matemática moderna resulta confuso por otra razón. Cierto número de textos y de cursos basados en ellos contienen principalmente material tradicional revestido (¿contaminado?) con un barniz de matemática moderna. Los capítulos de los temas de matemática moderna están entremezclados con los de matemáticas tradicionales sin integración entre los dos enfoques. Incidentalmente, muchos de estos textos híbridos (se podría usar una palabra más adecuada para describir la

prole de esta unión ilegítima de matemáticas modernas y tradicionales) son obra de autores hipócritas que evidentemente quieren capitalizar en ambos mercados, el moderno y el tradicional. De hecho, algunos de los principales defensores de las matemáticas modernas han escrito textos semejantes. Otros textos comienzan con un capítulo sobre la teoría de conjuntos, pasan acto seguido a la matemática tradicional y no hacen en lo sucesivo ninguna referencia a la teoría de conjuntos o a cualquier otro tema de la matemática moderna. Otros textos sólo van más allá del capítulo introductorio sobre teoría de conjuntos, en la medida en que utilizan la terminología de la matemática moderna a lo largo del libro, pero contienen principalmente matemáticas tradicionales.

Nos podríamos sentir inclinados a creer que estos textos tradicionales con un pellizco de matemática moderna no son muy usados, y que por tanto no afectan a la valoración de la matemática moderna. En realidad, tales textos son los más populares, porque sirven al profesor de orientación tradicional que quiere o está obligado a decir que enseña las nuevas matemáticas. Puede decir que lo hace así explicando realmente la mínima parte contenida en los textos o puede omitir estos temas sin cambiar el tratamiento de los temas tradicionales, ya que ambos no están integrados.

Puede ser interesante mencionar una prueba internacional, el *International Study of Achievement in Mathematics*, ya que fue realizada en 1964; por aquel tiempo muchos de los participantes en Estados Unidos habían estudiado matemáticas modernas. La prueba consistía en realidad en varios exámenes para estudiantes de diferentes edades. Los Estados Unidos obtuvieron una mala clasificación a todos los niveles, y especialmente en el grupo de trece años, que quedó en el décimo puesto. El Japón, incidentalmente, se clasificó el primero en todos los niveles de edad, y sus estudiantes sólo estudiaban matemáticas tradicionales. A pesar de los malos resultados de nuestros estudiantes, algunos partidarios de las matemáticas modernas trataron de interpretar las estadísticas en el sentido de que aquellos estudiantes que habían dado matemáticas modernas respondían mejor que los que habían dado matemáticas tradicionales. Pero había pocas y dudosas pruebas de ello. Aunque estos resultados parecen favorecer la enseñanza de las matemáticas tradicionales, incluso esta conclusión podía ser errónea. La importancia que se da a las matemáticas varía mucho de unos países a otros. Por ejemplo, los estudiantes ingleses de enseñanza secundaria que cursan matemáticas, prácticamente se especializan en el tema. Además, los estudiantes menos capaces nunca llegan a la enseñanza secundiaria; son eliminados en los exámenes que se hacen a los once años, y se les envía a la enseñanza profesional. En la Unión Soviética y en el Japón los jóvenes de ambos sexos deben conseguir muy buenos resultados para obtener la admisión en cualquier *college*, y trabajan mucho para sobresalir. Los estudiantes en los Estados Unidos no están bajo una presión semejante.

En la medida en que los exámenes son significativos, deberíamos examinar a estudiantes normales enseñados en condiciones normales, y sobre ellos no tenemos datos. De hecho, no se ha puesto en marcha un examen a gran escala sobre la calidad del programa de matemáticas modernas. Por ahora el esfuerzo dedicado a valorar adecuadamente las pretensiones de los partidarios de las matemáticas modernas es insignificante por comparación con las pretensiones. No se ha demostrado mediante exámenes o medidas objetivas de cualquier tipo la comprensión más profunda que se supone proporciona la matemática moderna.

Los planes de matemática moderna han estado en vigor el tiempo suficiente para que hayan llegado al *college* estudiantes formados en ellos. ¿Han obtenido estos estudiantes mejores resultados por haber recibido una educación teóricamente superior? Es casi imposible responder a esta pregunta. No se ha hecho ningún examen a gran escala de estos estudiantes. Además, es difícil saber quiénes han estudiado matemáticas modernas, porque, como ya hemos indicado, muchos cursos que pretenden ser modernos son realmente mezclas de matemática moderna y tradicional o tienen tan sólo un barniz de matemática moderna. Hay una unanimidad informal entre los profesores de *college* en el sentido

de que los estudiantes están ahora más flojos en técnica de cálculo que los de hace diez años. Pero este hecho, si se trata realmente de un hecho, no implica necesariamente la existencia de defectos en el plan de matemática moderna. La presión sobre los jóvenes para que consigan una educación a nivel de *college* ha provocado la entrada en los *college* de muchos estudiantes que no están preparados ni interesados en todos los temas. Además, la enseñanza de las matemáticas está siendo acelerada, cuando sería más cuerdo ir más despacio. Los estudiantes de enseñanza secundaria solían seguir un curso completo de geometría plana sintética. En el programa de matemática moderna se incluye en este curso algo de geometría analítica y de geometría de sólidos. Antes los estudiantes cursaban álgebra superior y geometría sólida en el último año de secundaria o en el primero de *college*. Estos temas han quedado prácticamente eliminados. Más adelante los estudiantes solían dedicar un semestre completo a la geometría analítica antes de estudiar cálculo infinitesimal. El curso de geometría analítica, además de introducir la relación fundamental entre ecuaciones y curvas, permitía a los estudiantes hacer progresos en álgebra, geometría y trigonometría. Durante los diez últimos años la geometría analítica ha sido sumergida en el cálculo infinitesimal y es muy poco lo que se enseña de ella. Así, los estudiantes llegan al cálculo con mucha menos preparación que la que tenían, y, en consecuencia, obtienen peores resultados.

Sin embargo, además de los exámenes, hay otros indicios de que no todo marcha bien en la matemática moderna. El profesor Beberman confesó en un discurso pronunciado en Pittsburgh en noviembre de 1960, dentro de un congreso patrocinado por la Thomas Alva Edison Foundation, que se había equivocado al hacer hincapié en el rigor en la geometría, llegando incluso a exclamar que no podía comprender cómo había podido cometer un error semejante.

En este mismo congreso, el profesor Edward G. Begle, director del mayor y más influyente grupo de elaboración del plan, el School Mathematics Study Group, dijo al comienzo de su intervención: «En nuestro trabajo sobre el plan no hemos tenido en cuenta la pedagogía.»

Algo más tarde, durante una charla en el University Symposium on Mathematics, que tuvo lugar en la Chicago State University, el 16 de noviembre de 1962, el profesor Beberman lanzó nuevas dudas sobre el acierto de su programa, que entonces tenía ya diez años. «Pienso que en algunos casos hemos tratado de responder a preguntas que los chicos no hacen y resolver dudas que ellos nunca tienen, y en realidad hemos respondido a nuestras propias preguntas y resuelto nuestras propias dudas, como adultos y profesores; pero éstas no eran las dudas y las preguntas de los chicos.»

El profesor Beberman siguió adelante con notable honradez hasta llegar a la crítica frontal. El 30 de diciembre de 1964, en la reunión de Navidad del National Council of Teachers of Mathematics, celebrada en Montreal, el doctor Beberman confesó: «estamos en peligro de formar una generación de niños que no sepan hacer cálculos aritméticos». Admitió que el nuevo plan había fracasado en relacionar las matemáticas con el mundo real y que se había ignorado todo principio pedagógico. A causa del excesivo acento puesto en ramas esotéricas de las matemáticas a expensas de las fundamentales, y a causa de la precipitada introducción de las nuevas matemáticas en las escuelas primarias, el profesor Beberman temía que se estuviese fraguando «un gran escándalo nacional».

A partir de éstas y otras muchas indicaciones, está claro que el profesor Beberman no estaba satisfecho con el trabajo de su grupo, y durante el invierno de 1971-72 fue a Inglaterra para estudiar nuevos planes experimentales que allí se estaban confeccionando. Desgraciadamente, el profesor Beberman murió poco después de llegar a Inglaterra. Cabe preguntarse qué hará el grupo de Illinois sin su dinámico director.

La evidencia más clara de que el plan moderno, tal y como se expuso a principios de los años sesenta, no es satisfactorio, se encuentra en algunas afirmaciones del profesor Begle. En numerosos discursos el profesor Begle ha admitido que el plan del SMSG ha minimizado la adquisición de técnicas y ha fracasado en la presentación de las relaciones que unen las matemáticas con los temas conexos. En una carta abierta (que apareció en *The Mathematics Teacher* en abril de 1966 y en *Science* en febrero de 1966) anunció su intención de preparar un plan totalmente nuevo para los grados séptimo a duodécimo. En esta carta afirma que la oficina asesora del SMSG «cree que se necesitan una planificación y una experimentación más amplias, a las que se debería dar ya comienzo. Esto debe hacerse para impedir que los temas actuales se fosilicen en una nueva ortodoxia que exigiría otra revolución dentro de unos años».

Pero si el trabajo realizado entre 1958 y 1966 fuera realmente válido, ¿por qué debería preocuparnos que el plan se fosilizase o la necesidad de una nueva revolución? Lo más parecido a una respuesta que se puede encontrar en la carta del doctor Begle es que el nuevo plan «debe responder al creciente requerimiento de las matemáticas en nuestra sociedad».

En 1966 fue designado un comité para proyectar la redacción de un nuevo plan. Hacia 1972 estaba acabada la revisión relacionada con la primera etapa de la enseñanza secundaria.

También se esbozó una versión especial para alumnos con resultados bajos y un curso de décimo grado que serviría de paso a los temas de los antiguos grados once y doce del SMSG. En el SMSG *Newletter* de febrero de 1972, el profesor Begle describía este programa. Aunque el contenido del nuevo plan para la primera etapa de enseñanza secundaria difiere algo de los temas anteriores, las características principales no eran esencialmente diferentes. Por ejemplo, «... la estructura sigue siendo claramente uno de los temas unificadores». Además, no se introdujeron cambios en el plan de la escuela primaria ni en en los antiguos temas de los grados diez, once y doce.

El programa proyectado en 1966 no será completado. Se sabe en círculos profesionales que ni el profesor Begle ni sus patrocinadores quedaron satisfechos con la revisión parcial. La ayuda financiera ha sido retirada y el SMSG se ha dispersado.

Además de las pruebas presentadas hasta ahora y de las críticas hechas en los capítulos precedentes, los argumentos contra las nuevas matemáticas están respaldados por los juicios de hombres de los que tenemos todas las razones para creer que son imparciales. Numerosos artículos críticos han aparecido en revistas profesionales tales como *The Mathematics Teacher.* No hay duda de que muchos más profesores, a quienes les gustaría expresar su desaprobación por las matemáticas modernas, no lo hacen porque esto podría molestar a sus directores, jefes de estudio o inspectores.

Querría mencionar una crítica en particular. Algunos profesores de *college* (el autor entre ellos) se reunieron y redactaron una protesta contra el movimiento, y pidieron a otros matemáticos que la respaldaran. Se habrían podido obtener centenares de firmas, pero, puesto que se trataba de mostrar la existencia de una oposición significativa, se decidió pedir unas setenta y cinco firmas de matemáticos experimentados y en activo. El documento, titulado «On the Mathematics Curriculum of the High School», fue publicado en *The Mathematics Teacher* y en el *American Mathematical Monthly* en marzo de 1962. Su lectura merece la pena y lo reproducimos a continuación.

SOBRE EL PLAN DE MATEMATICAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

El presente documento ha sido elaborado por varios de los firmantes y enviado a 75 matemáticos de Estados Unidos y Canadá. No se ha hecho ningún intento para conseguir gran número de firmas entre todos los matemáticos. Antes bien, el objetivo ha sido obtener un número modesto de firmas de hombres matemáticamente competentes, con conocimientos y experiencia, y de diversas localidades geográficas. Algunos de los firmantes, cuyo apoyo es realmente bien venido, ofrecieron sus nombres cuando tuvieron noticias del documento a través de algún colega.

Los matemáticos de este país cuentan ahora con un clima más favorable para el desarrollo y la introducción de mejoras en la enseñanza de la matemática. Varios grupos han advertido la oportunidad y están trabajando duramente y con las mejores intenciones para aprovecharla.

Sería una tragedia, sin embargo, que la reforma del plan fuese mal encaminada y se perdiera esta preciosa oportunidad. Desafortunadamente existen factores y fuerzas en la situación actual que nos pueden desorientar. Los matemáticos, reaccionando frente al control de la educación por los educadores profesionales, quienes quizá han hecho hincapié en la pedagogía a expensas del contenido, pueden ahora acentuar el contenido a expensas de la pedagogía de forma igualmente estéril. Los matemáticos pueden suponer inconscientemente que a todos los jóvenes les interesa lo mismo que a los matemáticos o que los únicos estudiantes dignos de atención son los que pueden conventirse en matemáticos profesionales. La necesidad de hoy día de aprender muchas más matemáticas que en el pasado puede llevarnos a buscar atajos que, sin embargo, podrían ser más dañinos que beneficiosos.

En vista de los posibles peligros, podría ser útil formular los que nos parecen principios fundamentales y líneas prácticas a seguir.

1. *Para quién.* El plan de matemáticas de bachillerato debería satisfacer las necesidades de todos los alumnos: contribuir a la formación cultural del estudiante en general y ofrecer preparación profesional a quienes usarán más tarde las matemáticas, es decir, a los ingenieros y científicos, teniendo en cuenta a la vez las ciencias físicas, que son la base de nuestra civilización tecnológica, y las ciencias sociales, que pueden hacer progresivamente mayor uso de las matemáticas en el futuro. Respondiendo también a las necesidades de los otros estudiantes, el plan puede incluir los temas más esenciales para los futuros matemáticos. Sin embargo, explicar a todos los estudiantes temas que sólo pueden interesar a la minoría de los futuros matemáticos es un despilfarro y significa ignorar las necesidades de la comunidad científica y de toda la sociedad.

2. *Saber es hacer.* En matemáticas un conocimiento valioso no supone nunca posesión de información, sino «saber hacer». Saber matemáticas significa poder hacer matemáticas: usar el lenguaje matemático con alguna fluidez, hacer problemas, criticar argumentos, buscar demostraciones y, lo que puede ser

más importante, reconocer un concepto matemático en una situación concreta o extraerlo de ella.

Por tanto, introducir nuevos conceptos sin un fondo suficiente de hechos concretos, introducir conceptos unificadores cuando no hay experiencia que unificar, o machacar constantemente en los conceptos introducidos sin aplicaciones concretas que estimulen a los estudiantes es peor que inútil: la formalización prematura puede llevar a la esterilidad; la introducción prematura de abstracciones encuentra resistencia especialmente en las mentes críticas, que, antes de aceptar una abstracción, quieren saber por qué es importante y cómo podría usarse.

3. *Las matemáticas y la ciencia.* En su significado cultural, tanto como en su uso práctico, las matemáticas están conectadas a las otras ciencias y las otras ciencias están conectadas con las matemáticas, que es su lenguaje y su instrumento esencial. Las matemáticas separadas de las otras ciencias pierde una de sus más importantes fuentes de interés y motivación.

4. *La interpretación inductiva y las demostraciones formales.* El pensamiento matemático no es tan sólo razonamiento deductivo; no consiste simplemente en demostraciones formales. El proceso mental que sugiere que se debe demostrar y cómo demostrarlo es una parte del pensamiento matemático, tanto como la demostración que eventualmente resulta de él. La extracción del concepto apropiado de una situación concreta, la generalización a partir de los casos observados, los argumentos inductivos, los argumentos por analogía y los ejemplos intuitivos para una conjetura imprevista son modos matemáticos de pensamiento. De hecho, sin alguna experiencia en tales procesos «informales» de pensamiento, el estudiante no puede comprender el verdadero papel de la demostración formal y rigurosa, que tan bien describió Hadamard: «El objeto del rigor matemático es confirmar y legitimar las conquistas de la intuición, y nunca ha tenido otra finalidad.»

Hay varios niveles de rigor. El estudiante debería aprender a comprender, buscar y criticar las demostraciones al nivel correspondiente a su experiencia y formación. Si se le empuja prematuramente a un nivel demasiado formal, puede desanimarse y hastiarse. Además, la necesidad de rigor puede advertirse mucho mejor en ejemplos en que las demostraciones presentan dificultades reales que en trivialidades nimias o inacabables.

5. *El método genético.* «Es muy útil para los estudiantes de cualquier tema leer los artículos originales sobre el tema; la ciencia se asimila siempre más completamente en su etapa de formación», escribió James Clerk Maxwell. Ha habido algunos profesores, tales como Ernst Mach, que para exponer una idea se referían a su génesis y reconstruían su formación histórica. Esto puede sugerir un principio general: el mejor camino para guiar el desarrollo mental de un individuo es reconstruir el desarrollo mental de la raza; recordar sus líneas generales, naturalmente, y no los miles de errores de detalle.

El principio genético puede protegernos de una confusión común: Si *A* es lógicamente anterior a *B* en cierto sistema, *B* puede, sin embargo, preceder a *A* en la enseñanza, especialmente si *B* ha precedido a *A* en la historia. En conjunto, cabe esperar mayores éxitos siguiendo las sugerencias del principio genético que la interpretación puramente formal de las matemáticas.

6. *Las matemáticas «tradicionales».* La enseñanza de las matemáticas en la enseñanza primaria y secundaria está retrasada con respecto a los requerimientos de la actualidad, y necesita mejoras esenciales: sin ningún género de dudas suscribimos esta opinión casi universalmente aceptada. Sin embargo, debería examinarse cuidadosamente la extendida opinión de que los temas que se enseñan en las escuelas secundarias han quedado sobrepasados, sin aceptarla literalmente. El álgebra elemental, la geometría plana y de sólidos, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal son aún fundamentales, como lo fueron hace cincuenta o cien años: los futuros usuarios de las matemáticas deben aprender todos estos temas si se están preparando para ser matemáticos, físicos, científicos sociales o ingenieros, y todos estos temas pueden ofrecer valores culturales a los estudiantes en general. El plan tradicional de enseñanza secundaria incluía en alguna medida todos estos temas, excepto el cálculo infinitesimal; quitar alguno de ellos sería desastroso.

Lo que está mal en el actual plan de enseñanza secundaria no son tanto los temas que se tratan como el aislamiento de las matemáticas de los otros dominios del conocimiento y la investigación, especialmente de las ciencias físicas, y el aislamiento de los distintos temas entre sí; incluso las técnicas y los teoremas dentro de un mismo tema aparecen aislados, como trucos inconexos, para el estudiante, a quien se deja en la oscuridad acerca del origen y el propósito de las manipulaciones y hechos que se supone debe aprender de memoria. Y así, desgraciadamente, a menudo sucede que la materia explicada aparece como inútil y aburrida, excepto quizá para los pocos futuros matemáticos que puedan persistir a pesar del plan.

7. *Las matemáticas «modernas»*. En vista de la falta de conexión entre las varias partes del plan actual, los grupos que trabajan en el nuevo plan harían bien en buscar introducir conceptos generales unificadores. Pensamos también que el uso juicioso de los conjuntos y del lenguaje y de los conceptos del álgebra *abstracta* pueden dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria. Sin embargo, el espíritu de la matemática moderna no se aprende repitiendo simplemente su terminología. De acuerdo con nuestros principios, querríamos que la introducción de los nuevos términos y conceptos fuera precedida de una suficiente preparación *concreta* y seguida de aplicaciones reales estimulantes y no de cuestiones superficiales y sin sentido: es preciso justificar la introducción de nuevos conceptos y mostrar sus aplicaciones si se quiere convencer a un chico inteligente de que estos conceptos merecen atención.

No podemos entrar aquí en análisis detallados del nuevo plan propuesto, pero no podemos dejar de decidir que, juzgándolo en base a las líneas principales establecidas antes (puntos 1-5), encontramos aspectos con los que no podemos estar de acuerdo.

Naturalmente, no todos los matemáticos tienen la misma opinión. Las matemáticas tienen muchos aspectos. Pueden ser consideradas como un instrumento para comprender nuestro mundo: se supone que para Arquímedes y Newton las matemáticas cumplían esta función. Las matemáticas también pueden considerarse como un juego con reglas arbitrarias en el que lo principal es sujetarse a las reglas del juego: tal visión puede considerarse adecuada para algunos problemas de fundamentos. Existen otros aspectos de las matemáticas, y los matemáticos profesionales pueden dedicarse a cualquiera de ellos. Pero en el terreno de la enseñanza, la elección no es una simple cuestión de gusto. Podemos esperar que un chico inteligente quiera explorar el mundo que le rodea pero no podemos esperar que aprenda reglas arbitrarias: ¿por qué éstas y no otras?

De todos modos, deseamos fervientemente mucho éxito a quienes trabajan en el nuevo plan. Deseamos especialmente que el nuevo plan refleje más la conexión entre las matemáticas y la ciencia, que preste cuidadosa atención a la distinción entre cuestiones lógicamente prioritarias y cuestiones que deberían tener prioridad en la enseñanza. Sólo en esta línea podemos esperar que los valores básicos de las matemáticas, su significado, sus objetivos y su utilidad reales resulten accesibles a todos los estudiantes, incluso, naturalmente, a los futuros matemáticos. La «extendida preocupación por la tendencia a un excesivo énfasis en la abstracción dentro de la enseñanza de las matemáticas para ingenieros» [1], de la que se ha hablado recientemente, apunta en la misma dirección.

Lars V. Ahlfors (Universidad de Harvard), Harold M. Bacon (Universidad de Stanford), Clifford Bell (Universidad de California, Los Angeles), Richard E. Bellman (*Rand Corporation*), Lipman Bers (Universidad de Nueva York), Garret Birkhoff (Universidad de Harvard), R. P. Boas (Universidad del Noroeste), Alfred T. Brauer (Universidad de Carolina del Norte), Jack R. Britton (Universidad de Colorado), R. C. Buck (Universidad de Wisconsin), George F. Carrier (Universidad de Harvard), Hirsh Cohen (IBM), Richard Courant (Universidad de Nueva York), H. S. M. Coxeter (Universidad de Toronto), Dan T. Dawson (Universidad de Stanford), Avron Douglis (Universidad de Maryland), Arthur Erdelyi (Instituto de Tecnología de California), Walter Freiberg (*Brown University*), K. O. Friedrichs (Universidad de Nueva York), Paul R. Garabedian (Universidad de Nueva York), David Gilbarg (Universidad de Stanford), Sydney Goldstein (Universidad de Harvard), Herman Goldstine (IBM), Herbert Greenberg (IBM), John D. Hancock (*Alameda State College*), Charles A. Hutchinson (Universidad de Colorado), Mark Kac (Instituto Rockefeller), Wilfred Kaplan (Universidad de Michigan), Aubrey J. Kempner (Universidad de Colorado), Lucien B. Kinney (Universidad de Stanford), Morris Kline (Universidad de Nueva York), Ignace I. Kolodner (Universidad de Nuevo México), Rudolph E. Langer (Universidad de Wisconsin), C. M. Larsen (*San Jose State College*), Peter D. Lax (Universidad de Nueva York), Walter Leighton (*Western Reserve University*), Norman Levison (Instituto de Tecnología de Massachusetts), Hans Lewy (Universidad de California, Berkeley), W. Robert Mann (Universidad de Carolina del Norte), M. H. Martin (Universidad de Maryland), Deane Montgomery (*Institute for Advanced Study*), Marston Morse (*Institute for Advanced Study*), Zeev Nehari (*Carnegie Institute of Technology*), Jerzy Neyman (Universidad de California, Berkeley), Frederick V. Pohle (*Adelphi College*), H. O. Pollak (*Bell Telephone Labo-*

[1] First Summer Study Group in Theoretical and Applied Mechanics Curricula, Boulder, Colorado, junio 1961.

ratories), George Polya (Universidad de Stanford), Hillel Poritsky (*General Electric Co.*), William Prager (*Brown University*), Murray H. Protter (Universidad de California, Berkeley), Tibor Rado (Universidad de Ohio), Warwick W. Sawyer (*Wesleyan University*), Max M. Schiffer (Universidad de Stanford), James B. Serrin (Universidad de Minnesota), Lehi T. Smith (Universidad de Arizona), I. S. Sokolnikoff (Universidad de California, Los Angeles), Eli Sternberg (*Brown University*), J. J. Stoker (Universidad de Nueva York), A. H. Taub (Universidad de Illinois), Clifford E. Truesdell (Universidad John Hopkins), R. J. Walker (*Institute for Defense Analyses* y Universidad Cornell), Wolfgang Wasow (Universidad de Wisconsin), André Weil (*Institute for Advanced Study*), Alexander Wittenberg (Universidad Laval).

10. LA VERDADERA JUSTIFICACION DE LAS NUEVAS MATEMATICAS

«Un matemático moderno preferiría caracterizar positivamente su campo como el estudio de sistemas generales abstractos, cada uno de los cuales se construye con elementos abstractos específicos y está estructurado por la presencia de relaciones arbitrarias pero inequívocas entre ellos.»

Marshall H. Stone

En vista de los defectos del programa de matemáticas modernas y de su fracaso en remediar los defectos del plan tradicional, ¿por qué se creó y se promocionó el programa de matemáticas modernas? Es más, puesto que la proclamada superioridad de este programa no estaba suficientemente apoyada por su contenido u otros argumentos, ¿qué justifica su aceptación?

Para comprender por qué se estableció el plan de matemáticas modernas, y no otra versión más acertada, es necesario señalar primero cuáles son los intereses de los matemáticos modernos. No hay duda de que hasta el final del siglo XIX la principal preocupación de los grandes matemáticos era comprender el funcionamiento de la naturaleza. No necesitamos recurrir a la historia porque esto es algo que no se discute. Las matemáticas eran consideradas como una de las ciencias y durante los siglos XVII, XVIII y la mayor parte del XIX raramente se señala la distinción entre matemáticas y ciencia teórica. De hecho, muchos de los hombres que han sido considerados como los matemáticos más importantes del pasado hicieron un trabajo más sobresaliente en astronomía, mecánica, hidrodinámica, elasticidad, electricidad y magnetismo. Las matemáticas fueron simultáneamente la reina y la criada de las ciencias.

Estos hombres no vacilaban en buscar aplicaciones prácticas para los conocimientos científicos que ellos y otros habían acumulado. Newton estudió el movimiento de la luna para ayudar a los marinos a determinar su posición en el mar. Euler estudió el diseño de barcos veleros e hizo mapas y escribió un texto básico de artillería. Descartes diseñó lentes para mejorar el telescopio y el microscopio. Gauss no sólo levantó el cuerpo del electorado de Hannover, sino que trabajó para mejorar el telégrafo eléctrico y la medida del magnetismo. Estos pocos ejemplos pueden multiplicarse cien veces. Casi todos estos hombres no sólo veían la utilidad potencial del conocimiento científico que estaban ayudando a acumular, sino que estaban volcados en la aplicación de este conocimiento.

Sin embargo, la mayor parte de los matemáticos de los últimos cien años se han separado de la ciencia. No conocen la ciencia y, lo que es más, no están ya preocupados por la utilización de los conocimientos matemáticos. Es verdad que algunos, conscientes de la noble tradición que motivó la investigación matemática en el pasado y que justificó el honor reconocido a hombres como Newton y Gauss, aún reivindican el potencial valor científico de su trabajo matemático. Hablan de la creación de modelos para la ciencia. Pero en realidad no están interesados en este objetivo. De hecho, la mayor parte de los profesores de matemáticas modernas no pueden crear modelos, puesto que no entienden de ciencia. Intentan brillar con el reflejo de la luz de los grandes matemáticos del pasado e incluso buscan apoyo para sus investigaciones citando los logros de sus predecesores. Las matemáticas se han cerrado sobre sí mismas, se alimentan de sí mismas, y es muy improbable, si podemos juzgar por lo que sucedió en el pasado, que la mayor parte de la investigación matemática moderna contribuya al avance de la ciencia. Cuando se enfrentan con esta acusación, los matemáticos no se atreven a negarla, sino que defienden sus creaciones en base a que son bellas. No vamos

a discutir aquí si lo son realmente. Lo importante es que se utiliza la belleza para justificar el trabajo.

Otra característica de la actividad matemática actual es la gran especialización. Las matemáticas se han extendido enormemente, como la ciencia, y la mayor parte de los matemáticos están casi obligados a concentrarse en áreas limitadas para mantenerse al corriente de las creaciones de otra gente y producir nuevos resultados propios. No hay que decir que la educación de los nuevos matemáticos, a cargo de profesores que son a su vez especialistas en campos concretos, sigue el mismo curso. Los candidatos a doctores se ven obligados a meterse en oscuros rincones para producir tesis satisfactorias. Ya no tienen una amplia educación matemática, y mucho menos científica.

El énfasis en el campo propio de las matemáticas y en la especialización es particularmente fuerte en los Estados Unidos. La razón principal es que en este país la investigación es un fenómeno relativamente nuevo, y los profesores americanos ansiosos de brillar y de educar a estudiantes que brillen, se especializan con la intención de obtener resultados rápidamente. El trabajo matemático clásico, poseedor de objetivos científicos, exige una amplia formación, porque los temas que trata han sido explorados durante varios cientos de años. Consecuentemente, sólo un pequeño porcentaje de matemáticos, a los que frecuentemente se etiqueta como matemáticos aplicados, continúan intentando alcanzar los objetivos tradicionales. La mayor parte se han pasado a los problemas puramente matemáticos y a la formalización, axiomatización y generalización de lo que ya es conocido. Tales tareas son mucho más fáciles.

El famoso físico-matemático John L. Synge se lamentaba ya en 1944 de la ruptura entre las matemáticas y la ciencia.

> La mayor parte de los matemáticos trabajan (hoy) con ideas que, según opinión general, pertenecen de forma definida a las matemáticas. Forman una cofradía cerrada. Los iniciados renuncian a las cosas de este mundo y generalmente cumplen su voto. Sólo unos pocos matemáticos se aventuran fuera de

casa buscando sustento matemático en problemas surgidos directamente de otros campos de la ciencia. En 1744 ó 1844 casi todos los matemáticos pertenecían a esta segunda clase. En 1944 forman una fracción tan pequeña que es necesario recordar a la mayoría la existencia de la minoría y explicar sus puntos de vista.

La minoría no quiere ser etiquetada como «físicos» o «ingenieros» por estar siguiendo una tradición matemática que se ha extendido durante más de veinte siglos e incluye nombres como los de Euclides, Arquímedes, Newton, Lagrange, Hamilton, Gauss o Poincaré. La minoría no pretende despreciar de ninguna forma el trabajo de la mayoría, pero teme que una matemática que se alimente sólo de sí misma acabará con el tiempo por agotar su interés... Aparte de que el estudio de la naturaleza ha suscitado (y con toda probabilidad continuará suscitando) problemas mucho más difíciles que los planteados por los matemáticos dentro del círculo de sus propias ideas...

La ciencia está en el presente más activa que lo hubiera estado nunca antes. No hay signos evidentes de decadencia. Sólo los más observadores se han dado cuenta que el vigilante ha abandonado su deber. No se ha ido a dormir. Está trabajando más que nunca, pero solamente para sí mismo...

El cambio y la muerte son tan inevitables en el mundo de las ideas como lo son en los asuntos humanos. Ciertamente, no es propio de un verdadero amante de las matemáticas fingir que no existen cuando sobrevienen. Es imposible estimular artificialmente las fuentes profundas del interés intelectual. Si no hay algo que retenga nuestra imaginación, no hay nada que hacer. Si los matemáticos han perdido realmente su antiguo toque universal —si, de hecho, ven con más certeza la mano de Dios en los refinamientos de una precisa lógica que en los movimientos de las estrellas—, entonces cualquier tentativa para atraerlos de nuevo a sus viejas querencias no sólo sería inútil, sino que sería una negación del derecho de los individuos a la libertad intelectual.

En vez de fingir interés por la utilidad de su trabajo, algunos matemáticos enarbolan una nueva declaración de independencia. El profesor Marshall H. Stone, estando en la Universidad de Chicago, decidió tomar el toro por los cuernos en su artículo «The Revolution in Mathematics».

Aunque desde 1900 se han producido varios cambios importantes en nuestra concepción de las matemáticas o en nuestra visión de ellas, lo que verdaderamente implica una revolución en las ideas es el descubrimiento de que las matemáticas son completamente independientes del mundo físico. Dicho con más precisión: vemos ahora que las matemáticas no tienen necesariamente otras conexiones con el mundo físico que las vagas y mistificadoras implícitas en la afirmación de que el pensamiento tiene lugar en el cerebro... Cuando dejemos de comparar las matemáticas de hoy con las matemáticas de fines del siglo XIX, nos asombraremos al advertir cuán rápidamente ha crecido en cantidad y en complejidad nuestro conocimiento matemático, pero tampoco dejaremos de observar que este desarrollo ha estado estrechamente relacionado con el énfasis en la abstracción y con un creciente interés por la percepción y análisis de modelos matemáticos amplios. También comprenderemos que la tendencia a la abstracción debe continuar inevitablemente, reforzada por el éxito que ya ha alcanzado. Siguiendo esta tendencia y prestando cada vez mayor atención a discusiones y estudios de modelos abstractos, los matemáticos han tomado progresivamente conciencia de la antítesis fundamental entre los aspectos estructurales de las matemáticas y el aspecto estrictamente manipulativo que tan frecuentemente parece tener suprema importancia en sus aplicaciones y que tan a menudo es la principal preocupación del profesor de matemáticas...

Un matemático moderno preferiría caracterizar positivamente su campo como el estudio de sistemas generales abstractos, cada uno de los cuales se construye con elementos abstractos específicos y está estructurado por la presencia de relaciones arbitrarias pero inequívocas entre ellos. Entendería por estudio de tales sistemas matemáticos no sólo el examen de las propiedades intrínsecas de los sistemas individuales, sino también la comparación de las estructuras de los diferentes sistemas. Mantendría que ni estos sistemas ni los medios dados por la lógica para estudiar sus propiedades estructurales tienen ninguna conexión directa, inmediata o necesaria con el mundo físico.

... En realidad, es evidente que las matemáticas pueden equipararse a un juego —o, más bien, a una infinidad de juegos— en el que las piezas y los movimientos no tienen significado intrínseco, y el interés principal reside en percibir y utilizar los modelos de juego permitidos por las reglas. Cuando vemos desde esta perspectiva las matemáticas, las cuestiones anteriores suscitan el problema de determinar si es o no posible reducir estos juegos a un procedimiento automático prescrito que no deje lugar al raciocinio o la inspiración.

Los puntos de vista expresados por Stone y otros no han dejado de suscitar oposición. Richard Courant, antiguo director del departamento de matemáticas de la Universidad de Gotinga, que durante el período prehitleriano fue el centro del mundo de las matemáticas, y posterior director del Courant Institute de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Nueva York, replicó a Stone (véase la referencia a Carrier en la bibliografía):

Muchos de ustedes han visto en el último número del *American Mathematical Monthly* [octubre de 1961] un artículo que tiene particular importancia para nuestro presente programa de discusiones. El artículo (del profesor Marshall Stone) habla de «La revolución en las matemáticas»; afirma que vivimos en una era de grandes éxitos matemáticos, que deja atrás todo lo hecho desde la antigüedad hasta ahora. El triunfo de la «matemática moderna» se atribuye a un principio fundamental: la abstracción y el consciente abandono por las matemáticas de la física y otros contenidos. Así, la mente matemática, libre de lastres, puede remontarse a las alturas desde las que puede ser perfectamente observada y dominada la realidad a ras de tierra.

No quiero deformar o minimizar las afirmaciones y las conclusiones pedagógicas del distinguido autor. Pero como llamada, como tentativa para establecer una línea de investigación y, ante todo, de enseñanza, el artículo parece ser una señal de peligro, y necesitar ciertamente algunos matices. El peligro de los estusiastas de la abstracción procede de que esta moda no defiende sinsentidos, sino simplemente promueve una media verdad. No se debe permitir que las medias verdades unilaterales borren los aspectos vitales de una verdad completa y equilibrada.

Ciertamente, el pensamiento matemático actúa por abstracción, las ideas matemáticas necesitan progresivos refinamientos abstractos, axiomatización, cristalización. Es cierto que cuando se alcanza un nivel más alto de comprensión estructural, se hacen posibles importantes simplificaciones. Ciertamente es verdad —y esto ha sido claramente resaltado durante largo tiempo— que las dificultades básicas en matemáticas desaparecen si se prescinde del prejuicio metafísico de ver en los conceptos matemáticos descripciones de una realidad en algún modo sustantiva.

Sin embargo, la sangre vital de nuestra ciencia procede de sus raíces; estas raíces se extienden en ramificaciones sin fin, profundizando en lo que se puede llamar la realidad, si es que la «realidad» son la mecánica, la física, las formas biológicas, el comportamiento económico, la geodesia, o en último término otras ramas de las matemáticas que ya entran en el reino de lo conocido. La abstracción y la generalización no son más vitales para las matemáticas que los fenómenos concretos, y, sobre todo, no lo son más que la intuición inductiva. Sólo la síntesis y la interacción de estas fuerzas pueden mantener a las matemáticas vivas y evitar que se sequen convirtiéndose en un esqueleto muerto. Debemos luchar contra todo intento de llevarnos unilateralmente hacia un polo de la antinomia vivir/consumirse.

No debemos aceptar el antiguo y blasfemo sinsentido de que la justificación final de la ciencia matemática sea la «gloria de la mente humana». No debe permitirse que las matemáticas se dividan en una variedad «pura» y otra «aplicada». Deben permanecer y fortalecerse como una rama vital unificada en la amplia corriente de la ciencia, y se debe evitar que se conviertan en un pequeño arroyo lateral que puede desaparecer en la arena...

Quizá la amenaza más seria de la unilateralidad hace referencia a la educación. Una enseñanza inspirada por profesores competentes, ampliamente informados es hoy más que nunca una necesidad abrumadora para nuestra sociedad. Es verdad que los planes son importantes, pero las peticiones de reforma no deben cubrir las pérdidas de contenido, la propaganda a favor de una abstracción carente de interés, el aislamiento de las matemáticas, el abandono del ideal del método socrático en favor de los métodos del dogmatismo catequético.

De todos modos, un remedio radical y vitalmente necesario para muchas de las enfermedades de nuestros *schools* y *colleges* sería el que se reconociese que una estrecha interconexión entre matemáticas, mecánica, física y otras ciencias es el principio obligatorio que debe ser vigorosamente abrazado por las nuevas generaciones de profesores. Ayudar a tal reforma es una obligación solemne de todo científico.

En otra ocasión, en la necrológica de un matemático muy conocido, Courant expresó su preocupación por el abandono de la ciencia. «Existe el peligro de que las matemáticas aplicadas del futuro deban desarrollarlas los físicos y los ingenieros y que los matemáticos profesionales importantes no tengan contacto con los nuevos descubrimientos.»

La tendencia a la abstracción, a las matemáticas por las matemáticas, llevó al mundialmente renombrado matemático John von Neumann a lanzar una advertencia. En su artículo «The Mathematician» dijo:

> Si una disciplina matemática se aleja de sus fuentes empíricas, o aún más, si tan sólo se inspira indirectamente en la «realidad» a través de ideas de segunda o tercera mano, se ve acosada por muy graves peligros. Se hace cada vez más esteticizante, más y más puramente *l'art pour l'art*. Esto puede no ser malo si el campo está rodeado de temas correlacionados que todavía poseen estrechas conexiones empíricas o si la disciplina está bajo la influencia de hombres con un juicio excepcionalmente bien desarrollado. Pero hay un grave peligro de que el tema se desarrolle según la línea de mínima resistencia, de que la corriente, al alejarse de su fuente, se divida en una multitud de ramas insignificantes, y de que la disciplina se convierta en una masa desorganizada de detalles y minucias. En otras palabras, a gran distancia de sus fuentes empíricas, o tras un largo desarrollo «abstracto», un tema matemático se ve en peligro de degeneración. Al comienzo el estilo es normalmente clásico; cuando éste muestra signos de hacerse barroco, se enciende la luz de peligro.

El eminente matemático, profesor James J. Stoker, de la Universidad de Nueva York, expresó en 1962 otra protesta:

> Es extraño que en este país, que tanto se enorgullece del uso práctico que hace de todo conocimiento científico acumulado a lo largo de los siglos, las matemáticas hayan seguido en los últimos cincuenta años un camino marcadamente abstracto, y que se haya descuidado mucho más el aspecto de nuestra ciencia en el que la relación entre matemáticas y mundo físico juega un papel más importante...

> ... Observo que el punto de vista abstracto y el descuido, incluso el desprecio, por aquella clase de matemáticas que se refieren a la realidad, aún representa el tono que prevalece en las matemáticas norteamericanas. El hecho es que los más importantes cultivadores de la rama de las matemáticas en que la interrelación con la mecánica y la física es una fuerte motivación son casi todos de la vieja generación, y parecen previsibles escasos relevos. En mi opinión, esto no es conveniente, ni para nuestra ciencia ni para la prosperidad de este país. Además, observo que existen importantes fuerzas que tienden a perpetuar esta situación propagando la noción de que la interpretación fuertemente abstracta es el mejor camino para enseñar matemáticas a los niños en las escuelas primarias. Me parece que esta actitud ignora la psicología humana y razona al revés: ignora el hecho histórico de que el progreso en matemáticas siempre ha venido ligado a la formulación de abstracciones apropiadas y verdaderamente válidas, con base en una prolongada experiencia de carácter muy concreto, e ignora también la correspondiente y muy verosímil conclusión de que éste es también el camino que sigue la mente de la mayor parte de la gente.
>
> No debe pensarse que ni yo ni otros colegas que comparten mi actitud nos sentimos en oposición a aquellos matemáticos que han elegido seguir su trabajo de manera tan abstracta como ellos creen conveniente y provechoso. Nuestro punto de vista es que para la salud de nuestra ciencia es vital que el contacto con el mundo físico se preserve y se cultive, no simplemente por los evidentes resultados prácticos que inevitablemente resultan de tal trabajo, sino porque toda la historia de las matemáticas muestra que tales preocupaciones tienen un efecto estabilizador, vitalizador y fructífero en nuestra ciencia.

El peligro para las matemáticas de romper con las ciencias ha sido subrayado por muchas otras personas. El importante matemático americano George D. Birkhoff, profesor de matemáticas en la Universidad de Harvard, dijo ya en 1943: «Serán probablemente los nuevos descubrimientos matemáticos inspirados por la física los que tendrán mayor importancia, pues, desde el principio, la naturaleza ha marcado el camino y establecido el modelo que deben seguir las matemáticas, el lenguaje de la naturaleza.

Al argumento de que las matemáticas son ahora potencialmente más poderosas para la ciencia porque son libres de seguir su propio curso, los «matemáticos aplicados» replican con la evidencia de la historia. Todas las aplicaciones de las matemáticas a la ciencia vinieron de ideas matemáticas inspiradas por la ciencia. Ningún matemático ha producido ideas útiles para la ciencia desde una torre de marfil. Es verdad que las ideas inspiradas por la ciencia han encontrado después inesperadas aplicaciones, pero las ideas iniciales eran sólidas por proceder de verdaderos problemas físicos. En el artículo ya mencionado Synge también señalaba este punto:

> La naturaleza suscitará importantes problemas, pero éstos nunca llegarán hasta el matemático. El puede sentarse en su torre de marfil esperando al enemigo armado con todo un arsenal, pero el enemigo nunca vendrá hacia él. La naturaleza no presenta problemas ya formulados. Deben desenterrarse con pico y pala, y el que no quiera ensuciar sus manos nunca los verá.

¿Qué relación existe entre la naturaleza de la actual investigación matemática y la reforma del plan? La cuestión reside en que los portavoces de la reforma han sido profesores de *college*. Estos hombres fueron educados en un mundo matemático radicalmente alejado de los conceptos que alentaban a los grandes matemáticos del pasado. Aproximadamente el 80 por 100 de los doctores en matemáticas no solamente son especialistas en un reducido campo, sino que están confinados en rincones de la lógica matemática, el álgebra y la topología, campos que, en conjunto, están muy alejados de la ciencia. Estos hombres ni conocen la física elemental ni tienen ningún deseo de conocerla. Como no tienen idea del papel que han jugado las matemáticas en la historia, son ignorantes en tanto matemáticos y, desde luego, en tanto seres humanos educados. La mayor parte de los profesores de hoy se dedican a las abstracciones, las generalizaciones, las estructuras, el rigor y las axiomáticas. Puesto que es esto lo que hacen la mayor parte de

los matemáticos, no es sorprendente que piensen que esto es lo que se debería enseñar a los jóvenes. Cuando se les pide ayuda en la preparación del plan, estos profesores de *college*, competentes o incompetentes, sólo pueden sugerir los estrechos y especializados temas abstractos con los que están familiarizados, o haciendo alguna concesión al nivel elemental de la instrucción, versiones aguadas o abreviadas de los planteamientos más sofisticados de las matemáticas tradicionales. Este hecho explica en gran parte el contenido del plan de matemática moderna.

El profesor Stone, cuya caracterización del moderno investigador matemático ya hemos citado, no vaciló en decir, en el mismo artículo, que el plan debía ser remodelado para enseñar esta clase de matemáticas. «Es completamente evidente que estas nuevas intuiciones y avances que en suma constituyen una genuina revolución en matemáticas plantean difíciles problemas prácticos a los educadores. El incorporar al plan de matemáticas los elementos esenciales de nuestros nuevos conocimientos matemáticos es de por sí un trabajo bastante considerable, pero la necesidad de presentar las matemáticas al nivel abstracto que han alcanzado y de reconciliar sus aspectos antitéticos incrementa grandemente las dificultades implícitas en poner la enseñanza matemática a la altura que requieren los tiempos...»

Las consecuencias de que intervengan profesores de universidad en la reforma del plan son aún más perjudiciales. Se admite que los profesores de *college* han sido escogidos principalmente por sus conocimientos de los temas de la materia y su esfuerzo investigador y no por su habilidad pedagógica. Estando entrenados para la investigación, están mal preparados para la enseñanza incluso a nivel de *college*. Los matemáticos no son pedagogos. De hecho, unos y otros son casi conjuntos disjuntos. Estos hombres no comprenden que los objetivos de la escuela primaria, secundaria e incluso de la educación universitaria y los intereses y capacidades de los estudiantes a estos niveles tienen poca relación con la investigación matemática. Habiéndose consagrado como sabios, mediante la adquisición del grado de doctor y teniendo posiblemente una posición prestigiosa en alguna de las principales universidades, se consideran expertos en áreas en las que de hecho son totalmente ignorantes. A pesar de sus fallos pedagógicos cuando enseñan en su provio nivel y a pesar de que la mayor parte de los profesores que participaron en la reforma del plan no habían estado en una escuela primaria o secundaria desde sus tiempos de estudiantes, los profesores de matemáticas no vacilaron en cargar sobre sí una tarea que exigía una considerable perspicacia pedagógica. Se podría decir que fueron presuntuosos. Actuaron como si la pedagogía fuese sólo un detalle, mientras que si hubieran aprendido realmente algo de sus estudios, tendrían que saber que casi cualquier problema relacionado con los seres humanos es enormemente complejo. Los problemas de pedagogía son ciertamente más difíciles que los problemas de matemáticas, pero los profesores tienen una confianza suprema en ellos mismos. El problema de la mayor parte de los hombres de ciencia, como dijo un gracioso, es que la ciencia se les sube a la cabeza.

El doctor Alvin M. Weinberg, director del Oak Ridge National Laboratory, en su artículo «But Is the Teacher Also a Citizen?», criticaba el punto de vista estrechamente profesional de los matemáticos y científicos. Refiriéndose a ambos decía:

> Así, nuestra ciencia tiende a hacerse más fragmentada y más estrechamente purista, porque los científicos, bajo la presión social de la comunidad universitaria, tienen poco tiempo o inclinación a ver lo que están haciendo desde otro punto de vista que no sea el propio. Imponen en los planes elementales su punto de vista estrechamente disciplinal, que da más valor a las fronteras de un campo que a su tradición, y tratan de exponer exhaustivamente lo que les parece importante, no lo que es importante desde una perspectiva más amplia. Los científicos no aprecian las aplicaciones a lo interdisciplinal porque esto se halla fuera de su propio universo; y de forma natural y con toda honradez tratan de imponer su estilo y sus criterios de valor...

Weinberg señalaba en otro lugar de su artículo cuál era la tendencia en la nueva ciencia y en los planes de matemáticas.

> Pero en la medida en que los nuevos planes han caído en manos de científicos universitarios y matemáticos de visión estrechamente purista, en la medida en que los planes reflejan una fragmentación y una abstracción deplorables, especialmente en matemáticas, en la medida en que los planes niegan la ciencia como codificación en favor de la ciencia como investigación, yo los considero peligrosos... Los puristas profesionales, que representan el espíritu de una universidad fragmentada y orientada a la investigación, se han hecho con la reforma del plan, y por su diligencia y agresividad han creado monstruos purísticos. Pero la educación a nivel elemental en cualquier campo es demasiado importante para ser dejada enteramente en manos de los profesionales de ese campo, especialmente si estos profesionales tienen una visión demasiado estrechamente especializada.

Quizá sea innecesario añadir que los matemáticos profesionales están tan absorbidos en progresar en sus investigaciones matemáticas que se ocupan poco o nada de adquirir conocimientos sobre la historia o el significado humano y cultural de su disciplina. Algunos incluso se enorgullecen de su ignorancia de la ciencia. Unos pocos pueden ser conscientes de los valores más amplios de las matemáticas, pero no consideran necesario enseñarlos. Por tanto, los matemáticos no están realmente preparados para presentar la materia bajo una luz interesante y atraer así a estudiantes que muy bien podrían dedicarse a ella si las clases fuesen atractivas. Incluso si estuvieran ansiosos de atraer a los estudiantes, unos profesores con tantas limitaciones serían incapaces de hacerlo o de llevar a cabo el esfuerzo necesario para adquirir los conocimientos adecuados.

El profesor Feynman, cuyo artículo «New Textbooks for the New Mathematics» ya ha sido citado, también critica mordazmente que los textos de las nuevas matemáticas hayan sido escritos por matemáticos puros que no están interesados en las conexiones de las matemáticas con el mundo real, ni en las matemáticas usadas en la ciencia y en la ingeniería por no ser en general nuevas, sino antiguas.

Ninguna de las críticas anteriores pretende negar las buenas intenciones de los profesores de *college*, pero las buenas intenciones a menudo sólo sirven para pavimentar ciertos caminos. No obstante, sus errores fueron tan grandes que uno no puede menos que preguntarse: «¿Cómo han podido equivocarse tanto?» En parte ya hemos enumerado sus errores, pero la cosa no termina aquí. Como profesionales con un extenso conocimiento de las matemáticas, poseen una cierta comprensión de la materia. Olvidando que ellos mismos han necesitado años para lograr esta comprensión, han creído poderla imbuir de una vez en la mente de los jóvenes. Por otra parte, su interés era formar futuros matemáticos, pero al no tener en cuenta la pedagogía también han fracasado en este cometido. Se han ceñido a los aspectos superficiales de las matemáticas, a saber, la forma deductiva de las estructuras ya conocidas, en vez de hacer énfasis en la formulación y resolución de problemas. Los matemáticos profesionales tienen motivos para proseguir con las matemáticas. Pero les faltó tener en cuenta que otras personas no ven el sentido de estudiar matemáticas.

Los matemáticos profesionales constituyen la amenaza más seria para la vida de las matemáticas, por lo menos en lo que se refiere a su enseñanza. Se molestan con los estudiantes que no se dedican a las matemáticas por completo y se impacientan con los estudiantes que necesitan convencerse de que esta materia merece la pena. Pero las matemáticas pueden resultar mortíferas, especialmente porque los cursos siguen un orden determinado por el propio orden lógico y esto significa mucho trabajo para progresar en el tema.

Los profesores de matemáticas protestarían enérgicamente si se les pidiese que empleasen ocho años en la enseñanza primaria, tres o cuatro en la secundaria y luego otro año en el *college* estudiando cerámica. Pero no ven que las matemáticas por las matemáticas tienen para los jóvenes menos interés que la cerámica para ellos mismos.

Los matemáticos de este siglo están obsesionados por el rigor. Hay razones históricas para esta preocupación. Sin embargo, ya hemos señalado cuán perjudiciales son las demostraciones rigurosas para los estudiantes. ¿Por qué insisten los matemáticos en esto? La respuesta es que, por ejemplo, partir de un conjunto mínimo de axiomas satisface su interés personal. No están dispuestos a preocuparse de la pedagogía.

Para preparar planes de estudio a cualquier nivel se deben conocer los objetivos de la educación a ese nivel. Por ejemplo, es mucho más importante en los primeros grados interesar a los estudiantes en la enseñanza que desarrollar su habilidad en cualquier materia. Para conocer estos objetivos se debe dedicar mucha atención al problema global de la educación. Y estos matemáticos ni lo hacen ni lo harán.

La mayor parte de los matemáticos no están interesados en la psicología del aprendizaje. Es un tema muy difícil, más difícil que las matemáticas. ¿Cuánto pueden aprender los jóvenes? ¿Se les puede sobornar con caramelos para que aprendan algo de memoria? ¿Resultan más fáciles las abstracciones para los jóvenes? ¿Parecerían los números negativos menos artificiales si se enseñasen antes? Un pedagogo hará todo lo que pueda para aprovechar los resultados de los psicólogos y aprender también de su propia experiencia. Los matemáticos no se tomarán el trabajo de aprovechar lo que los psicólogos puedan ofrecer, ni se tomarán la molestia de desarrollar su dominio del arte de enseñar.

También es fácil ver por qué los textos están tan pobremente escritos. La escritura de los matemáticos profesionales tiene un estilo propio. Es sucinta, monótona, simbólica y dispersa. La preocupación principal es la corrección. Pero los buenos textos deben tener un estilo vivo, atraer el interés, decir a los estudiantes dónde van y por qué. El escribir es un arte y los matemáticos no lo cultivan.

Una de las razones básicas de que los matemáticos fallen como pedagogos proviene de la naturaleza de la mente matemática. Una de las creencias más comunes es que los matemáticos son la encarnación misma de la inteligencia y que por tanto siempre pueden actuar sabiamente y obtener la solución de todos los problemas. La mayor parte de la gente lo cree porque les asusta la sola apariencia de los símbolos, y concluyen que si un hombre puede manejar estos símbolos debe ser muy inteligente. Cabría pensar también que todos los franceses deben ser muy inteligentes desde el momento en que saben francés. Pero yo me arriesgaría a distinguir entre la capacidad intelectual de un matemático y su inteligencia. El matemático tiene la habilidad de hacer distinciones exactas sobre el significado de las palabras, tiene la capacidad de aprender y aplicar las leyes de la lógica y la capacidad de retener y comparar un número de hechos. Posee lo que yo llamaría una mente racional. También puede ser creador en el terreno de las matemáticas. La inteligencia ciertamente puede incluir estas cualidades racionales, pero también incluye muchas más: el discernimiento, la capacidad de aprender de la experiencia, la percepción de los valores, la comprensión de los seres humanos y la capacidad de usar el conocimiento para solucionar los problemas humanos. Estas últimas cualidades no las poseen los matemáticos ni ningún otro grupo de gente seleccionado al azar.

Es racional presentar las matemáticas lógicamente, pero no es acertado. Consideremos la enseñanza del cálculo. Sabemos que el cálculo se construye sobre la teoría de los límites y podríamos concluir que el camino para enseñar el cálculo es empezar con la teoría de los límites. Un hombre inteligente también reflexionaría sobre si los jóvenes podrán aprender la teoría de los límites desde un principio y si querrán aprenderla sin motivaciones y aclaraciones previas.

Sobre una base de pura probabilidad, la inteligencia se distribuiría entre los matemáticos como entre los abogados, los médicos, los ingenieros y los hombres de negocios. Pero un ligero análisis nos puede llevar a dudar de que los matemáticos posean su parte de inteligencia. ¿Qué puede atraer a la gente hacia las matemáticas? Son una cosa sencilla, por comparación con la economía, la psicología o la física. Son un campo estrecho. No hay que tener un amplio bagaje de conocimientos para hacer matemáticas puras. Además, las matemáticas *per se* no tienen nada que ver con los seres humanos ni con los complejos problemas que plantea su trato. Como dijo Bertrand Russell, «Distante de las pasiones humanas, distante incluso de los compasivos actos de la naturaleza, las generaciones han creado un cosmos ordenado en que el pensamiento puro puede explayarse como en su propia casa y en el que al menos uno de nuestros más nobles impulsos puede escapar de su monótono exilio en el mundo real». Las matemáticas son adecuadas para atraer a aquellos que no se sienten capaces de tratar con la gente, a aquellos que se alejan de los problemas del mundo y que reconocen incluso conscientemente su incapacidad para tratar con tales problemas. Las matemáticas pueden servir de refugio.

Los matemáticos como clase están sobrevalorados en otras cuestiones esenciales. Se tiende a suponer que los profesores son de condición superior y que por tanto sólo abrazarán aquellas causas y movimientos que sean provechosos para la sociedad. Desgraciadamente, en las matemáticas también hay oportunistas, chaqueteros, reaccionarios, gentes ansiosas de prestigio o de poder y rateros. Es triste leer en la historia de las matemáticas que incluso muchos grandes matemáticos se rebajaron a presentar como propios resultados que habían tomado de otros.

Esta valoración de los matemáticos es terriblemente negativa, pero parece necesario desacreditar la creencia de que los profesores de matemáticas son infalibles y constituyen un grupo verdaderamente superior.

En vista de su obsesión por el progreso personal mediante la investigación, de su desgana a dedicar tiempo a los problemas de la pedagogía y de su desarrollo posiblemente limitado como seres humanos juiciosos, no es verosímil que los profesores de *college* puedan dirigir el trabajo de preparación de los planes de estudio para la enseñanza primaria y secundaria.

¿Cómo se vieron los profesores de los *college* envueltos en la reforma del plan de enseñanza primaria y secundaria? No hay duda de que en parte se necesitaba su ayuda. Los profesores de enseñanza primaria y secundaria no tienen tiempo suficiente para seguir los avances en matemáticas, mantenerse al corriente de los nuevos que deberían incluirse en el plan, obtener resultados de las investigaciones sobre el proceso de aprendizaje e incorporarlos a una revisión a gran escala del plan. Necesitan ser informados de estos asuntos por profesores universitarios, cuya función es estar informados en estas áreas. Por ello los profesores de matemáticas fueron llamados a participar en la reforma.

Hay otro grupo que podía haber sido útil en la reforma del plan. Es el grupo de los educadores. Sin embargo, la mayor parte de ellos no estaban al día en matemáticas superiores y estaban concentrados en cómo enseñar las matemáticas tradicionales. La situación de estos profesores fue expresada honesta y abiertamente por el profesor Max Beberman, que fue educador * de matemáticas. En las actas de la conferencia de 1964 del Committee on School Mathematics de la Universidad de Illinois, dedicada al «Papel de las aplicaciones en el plan de matemáticas de la enseñanza secundaria», dijo:

> Mi punto de vista siempre ha sido que yo, personalmente, tengo muy poca responsabilidad en la selección del contenido que se pone a prueba experimentalmente. Mi trabajo es determinar qué cosas pueden enseñarse y qué cosas no pueden ser enseñadas. Así que si alguien sugiere que se enseñe un tema determinado y aun haciendo mi mejor esfuerzo no consigo enseñárselo a los chicos, puede que no sea posible enseñar este tema: puede. Yo no sé si hacemos daño a los estudiantes si en primer lugar seleccionamos un buen contenido matemático y después hacemos nuestros mejores esfuerzos para enseñarlo. Estoy perfectamente satisfecho, como educador, de dedicar toda mi atención a encontrar la clase exacta de pedagogía necesaria para que las ideas matemáticas lleguen a los chicos, pero muchos críticos han señalado que no es posible confiar en los matemáticos para seleccionar el contenido de la enseñanza, que, de una forma o de otra, los matemáticos no comprenden qué es lo que pueden aprender los estudiantes de enseñanza secundaria. Estas objecciones me parecen absurdas, porque ¿quién sabe qué pueden aprender los estudiantes de secundaria? Esto es algo que debe experimentarse. Una crítica más seria es que los matemáticos no saben cuáles son las matemáticas apropiadas para los estudiantes. No saben qué cosas son realmente importantes dentro de las matemáticas en lo que a la educación general se refiere. Ahora bien, no sé quién cabe suponer que nos pueda aclarar esta cuestión. ¿Deberemos buscar gente no experta en matemáticas para que nos diga qué matemáticas son apropiadas? Pienso que éste es un problema con el que siempre vamos a encontrarnos. Sin embargo, creo que debemos pedir ayuda a los matemáticos a este respecto. No pienso que nos hayan engañado demasiado en el pasado. Pero pienso que es importante reconocer que hay mucha gente ahora, más de la que había hace tres o cuatro años, que discuten la suposición de que los matemáticos son los mejores para aconsejar qué matemáticas se deben enseñar en la enseñanza secundaria.

* Profesor en una *School of Education*, o escuela de formación de profesorado. (*N. del T.*)

El pedir consejo a los profesores de matemáticas sobre qué temas deben explicarse no es en sí mismo un error, y de hecho, como hemos señalado, es necesario. Desgraciadamente, los que han participado en el trabajo del plan no eran en general los adecuados. Aquellos pocos que todavía trabajaban en las áreas tradicionales de las matemáticas, las áreas referentes a las matemáticas y sus relaciones con las ciencias, estaban en los años sesenta altamente dedicados a la investigación de los problemas de ciencias de rápido crecimiento. Por tanto, los profesores que se sentían libres para dedicarse al trabajo del plan eran los dedicados a los aspectos más remotos, abstractos y puros de las matemáticas. Además de su propia unilateralidad, estos hombres, como generalmente sucede con los profesores de *college*, no habían tenido experiencia ni contacto con el plan de enseñanza primaria y secundaria. De hecho, habían desdeñado este campo en el pasado y por tanto no tenían idea de qué debería enseñarse a estos niveles o de cómo piensan los jóvenes. Muchos profesores de dudosa competencia, advirtiendo que sólo tendrían que trabajar con matemáticas elementales, se incorporaron encantados a esta tarea en busca de una actividad que pudiera incrementar su prestigio.

Cabría pensar que la debilidad pedagógica de los profesores de *college* habría sido compensada por los profesores de secundaria y por los educadores. Estos dos últimos grupos deberían saber qué se puede enseñar a los estudiantes de las escuelas primarias y secundarias y qué puede interesar a estos jóvenes. Pero los profesores de secundaria y los educadores sentían un temor reverencial por los matemáticos. En nuestra sociedad se considera a quien puede escribir un artículo sobre investigación como una persona de extraordinaria capacidad. ¿Cómo podrían los miembros más humildes de la hermandad dudar de hombres tan distinguidos y de tan indiscutibles conocimientos? Se puede decir, sobre la base de lo que ha sucedido, que en cada grupo de elaboración del plan los profesores de *college* dominaron a los educadores y a los profesores de las *schools.* Los educadores y los profesores se inclinaron ante los ídolos sin saber que la mayor parte de ellos tenían los pies de barro.

Lo sucedido no implica que los intelectuales no deban ocuparse de los problemas escolares. Ya hemos reconocido la necesidad de que lo hagan. Pero puede poner de relieve que los centros escolares deben tener fuerza suficiente para saber cuándo se les ayuda y cuándo se les lleva por caminos equivocados. El valor de la ayuda que los centros pueden recibir dependerá completamente de la competencia de quienes reciben la ayuda. Ellos deben juzgar la validez de los consejos recibidos. Dicho de otra manera, los profesores de *college* pueden ser utilizados como asesores, pero ciertamente no deben dirigir ni dominar la elaboración de los planes de estudio de enseñanza primaria y secundaria.

Hemos dado cuenta de la orientación del nuevo plan de matemáticas, pero esto no explica su aceptación relativamente amplia. En vista de los múltiples defectos de este plan, cabía pensar que en general sería rechazado por el país. Varios factores explican su adopción.

Probablemente el factor más importante es que los grupos del plan estaban organizados y bien financiados. Por tanto, estos grupos emprendieron una activa campaña para poner el nuevo plan en circulación. No solamente los directores, sino también los miembros de los distintos grupos comenzaron a hablar en favor del nuevo plan en reuniones de profesores, directores y administradores. Puesto que el plan tradicional no tenía éxito, esta gente se interesó, por lo menos, en el nuevo plan. Cuando se les aseguró que matemáticos, educadores y profesores de enseñanza secundaria habían colaborado en el nuevo plan y estaban de acuerdo sobre sus méritos, quedaron convencidos.

Además de dar conferencias, los grupos del plan publicaron informes. El documento ya mencionado, *The Revolution in School Mathematics,* subtitulado «Un reto para administradores y profesores», fue publicado en 1961 por el National Council of Teachers of Mathematics. En apariencia el documento era un informe sobre las conferencias dadas por todos los Estados Unidos para informar a los administradores escolares y a los supervisores de matemáticas de la naturaleza del nuevo plan. Pero se describía el plan diciendo «que les permitiría ponerse a la cabeza en la introducción de nuevos y perfeccionados programas de matemáticas». Esto implicaba que los administradores que no aceptaran la reforma serían culpables de negligencia o desinterés. Pero en 1961 este país había tenido muy poca experiencia en los nuevos planes. En aquella época un folleto que los promocionaba podía ser acusado justamente de propaganda.

Desgraciadamente la propaganda fue eficaz. La mayor parte de los administradores escolares no tenían la amplia formación científica necesaria para valorar las innovaciones propuestas. No sabían si las innovaciones eran modelos de saber hacer educativo combinado con los mayores avances en la materia o si eran el resultado del entusiasmo de los especialistas en la materia, sin ningún interés para las necesidades de los estudiantes. La presión ejercida sobre ellos puso a los administradores en un aprieto. Podían fingir interés y amor al progreso adoptando alguno de los modernos programas, o podían ser honrados y admitir que no eran competentes para juzgar los méritos de ninguno. Lo que pasó finalmente fue que muchos directores y jefes de estudios impusieron el plan moderno a sus profesores para mostrar a los padres y a la administración del centro su información y su dinamismo.

La misma adopción del término matemática moderna es pura propaganda. «Tradicional» indica antigüedad, inadecuación y esterilidad, y es un término peyorativo. «Moderno» significa actual, importante y vital. Los términos moderno y nuevo fueron utilizados para todo. Los portavoces insistieron en que el plan tradicional ofrecía pocas cosas que no fueran conocidas antes de 1700. Naturalmente, como hemos visto, los términos moderno y nuevo no estaban demasiado justificados desde el momento en que el plan consistía principalmente en una nueva interpretación de las matemáticas tradicionales.

Algunos portavoces se rebajaron a recurrir a amenazas poco veladas. Algunos de ellos estaban en la Comisión de Matemáticas de la College Entrance Examination Board. Esta junta elabora los exámenes de aptitud que los alumnos de enseñanza secundaria hacen para ingresar en un *college*. Los portavoces insinuaron que estos exámenes contendrían preguntas sobre los temas de matemática moderna. Puesto que los profesores estaban ansiosos de que sus estudiantes hiciesen bien estos exámenes, se vieron obligados a aprender el contenido del nuevo plan y a enseñar estos temas.

Otra estratagema empleada deliberadamente para poner las matemáticas en circulación ha sido descrita por el profesor Paul Rosenbloom, matemático muy competente que participó en la redacción del plan. En su artículo, «Applied Mathematics: What is Needed in Research and Education» (véase la referencia a Carrier en la bibliografía), el profesor Rosenbloom describía esta estratagema: «Ahora bien, en esta cuestión de tratar de revisar la enseñanza de las matemáticas escolares hemos tenido muchos problemas. Entre ellos un problema de ingeniería social, pues tenía que hacerse rápidamente un gran cambio en unas condiciones en que nadie tenía el poder de imponer nada a nadie. Había que conseguir que mucha gente decidiera hacer voluntariamente lo que debía hacer. No sólo teníamos el problema

de planear qué matemáticas debían enseñarse en el grado 7 o en cualquier otro grado, sino que teníamos también el problema de introducirlas rápidamente en un gran número de centros sin poder forzarles. Así, el procedimiento tenía que ser reunir a un gran número de personas de diferentes partes del país y que representaran distintos puntos de vista, el matemático, el educativo, el escolar, etc., para que escribieran libros en una atmósfera de libertad. Esencialmente el problema era poder decir que el curso de noveno grado, por ejemplo, representa un acuerdo de matemáticos y profesores. Las escuelas de Seattle adoptaron el plan del SMSG porque su supervisor de matemáticas formaba parte del equipo de redacción. El National Council of Mathematics Teachers jugó también un papel en esto. El presidente de su comité de planes de estudio de escuela secundaria estaba en el equipo de redacción del curso de grado undécimo. Se tienen estos problemas y, hasta cierto punto, el resultado depende sobre todo de la persuasión y madurez de juicio de la gente que está en los equipos de redacción representando diversos puntos de vista.» Tales esquemas promocionales llevaron al asesor de una escuela a decir que si la intuición pedagógica de quienes han desarrollado algunos de los programas modernos fuese igual a su perspicacia para la promoción, habría llegado la edad de oro de la enseñanza de las matemáticas.

Aunque muchos de los profesores de los equipos de redacción estuviesen desilusionados e incluso disgustados por los compromisos que se vieron obligados a hacer, no obstante volvieron a sus lugares de procedencia satisfechos de haber sido partícipes en la elaboración del plan, y naturalmente inclinados a favorecer lo que habían ayudado a crear. Pronto se convirtieron en campeones ardientes de las matemáticas modernas y encabezaron su promoción.

Muchos profesores de *college* que buscaban una actividad en la que creían ser competentes —seguramente, argumentaban, los temas de enseñanza secundaria deben ser un juego de niños para eruditos profesores de *college* como nosotros—, tomaron a su cargo la defensa del plan moderno e incluso dieron cursos para iniciar a los profesores en las matemáticas modernas. Otros siguieron la moda porque participar en una actividad que había llegado a ser importante les daba relevancia e incluso prestigio. También los profesores de enseñanza primaria y secundaria, ansiosos de aparecer al frente de la enseñanza, se encargaron de promocionar lo que les habían echado encima. Desgraciadamente, al estar sometidos a un trabajo agotador y absorbente en sus obligaciones como maestros, no habían tenido oportunidad de aprender más acerca de lo que es significativo en matemáticas, y así no pudieron examinar críticamente las nuevas versiones en cuanto forma de enseñanza de las matemáticas.

Muchos profesores se metieron en esto porque vieron una oportunidad de escribir nuevos textos abasteciéndose de las nuevas matemáticas. A menudo se han limitado a revestir los viejos textos con algunas gotas de las nuevas matemáticas y a etiquetar estos libros como textos de matemática moderna. Naturalmente estos profesores deben aparentar al menos ser partidarios de las matemáticas modernas.

Cabría decir que estos textos representan un compromiso. Los estudiantes no están listos para dar un salto brusco a la matemática moderna, especialmente si ya han estudiado durante unos años las matemáticas tradicionales. Pero estos textos de compromiso no sirven realmente de transición. No se ha conseguido unificar razonablemente en ellos los temas tradicionales y los modernos. Son obras claramente comerciales que dan la impresión de ser matemáticas modernas, pero en realidad son montajes de temas modernos y tradicionales no integrados en absoluto.

Los editores, tratando de adelantarse en el mercado, sacaron series de textos de nueva matemática, y para asegurar su adopción, no sólo se unieron a la propaganda a favor de las nuevas matemáticas mediante anuncios llenos de hábil palabrería, sino que enviaron conferenciantes a las reuniones de profesores para hablar a favor de las nuevas matemáticas. La combinación de los portavoces del plan, los profesores que se convirtieron en partidarios suyos y los editores formó una tupida red de intereses creados que

hicieron presa en la ingenuidad matemática de la prensa, del público e incluso de las fundaciones que apoyaron el movimiento.

Además de estos factores que hemos descrito, hay otras razones para que las matemáticas modernas hayan encontrado apoyo. No hay duda de que algunos profesores creen realmente que la interpretación axiomática deductiva constituye la esencia de las matemáticas. Se trata de pedagogos sinceros, aunque no estén acertados, independientemente de que hayan adquirido esta estrecha visión por la educación que ellos mismos han recibido o se hayan visto inducidos a adoptarla porque muchos textos la defienden. También tiene uno la solapada sospecha de que algunos profesores disfrutan presentando el familiar sistema de numeración en su recóndita forma axiomática porque comprenden la sencilla matemática requerida, y sin embargo pueden fingir estar enseñando una profunda cuestión matemática.

Muchos jóvenes profesores creen que, ahora que poseemos una versión correcta y acabada de las matemáticas, es suficiente presentar su planteamiento axiomático o riguroso para que los estudiantes lo asimilen. Estos mismos profesores no habrían podido asimilar dicho planteamiento, pero habiendo aprendido la versión correcta no pueden recordar ni apreciar las dificultades que conlleva el aprendizaje de las versiones rigurosas.

Algunos profesores, que conocen las demostraciones rigurosas, se sienten incómodos al presentar simplemente un argumento convincente que ellos, al menos, saben que es incompleto. Pero no es el profesor quien debe quedar satisfecho, sino el estudiante. La buena pedagogía exige compromisos de esta índole.

El deseo natural del profesor es explicar unas matemáticas deductivas en su forma más acabada. Esta versión es ciertamente más elegante. Pero su valor para el estudiante es inversamente proporcional a la elegancia y armonía de la exposición, porque la versión final supone una explicación muy laboriosa y artificial.

Otros profesores quieren dar a los estudiantes toda la verdad de una vez, de forma que no tengan que olvidar lo que han aprendido una vez. Pero tampoco se puede enseñar inglés o historia empezando por el final. Una redacción que obtuviera la nota más alta en un curso de lengua en la enseñanza secundaria probablemente obtendría una calificación insuficiente a nivel de *college*. Además, una cosa es enseñar que $2 + 2 = 5$ y luego tener que corregirlo, y otra enseñar a restar «quitando» y luego introducir la noción de que -2 es el inverso aditivo de 2. Para un chico esto último es palabrería.

Otra razón importante de la popularidad de la interpretación deductiva axiomática es que su presentación es más sencilla. Toda la materia se dispone en una sucesión clara, bien definida, y todo lo que el profesor tiene que hacer es seguirla. No tiene más que ofrecer material enlatado. Yo he oído a algunos profesores quejarse de que muchos estudiantes, sobre todo de ingeniería, quieren tan sólo que se les enseñen las técnicas que deben aprender y luego limitarse a repetirlas. Pero los profesores que explican el planteamiento lógico porque les evita el problema de enseñar a los estudiantes a obtener resultados por sí mismos, llevándoles a participar en un proceso constructivo, explicándoles las razones para seguir un procedimiento y no otro, y buscando argumentaciones convincentes, son más reprensibles que los estudiantes que quieren evitar pensar y prefieren repetir mecánicamente los procedimientos aprendidos. Postular las propiedades resulta tan cómodo como robar en vez de trabajar honradamente, como dijo Bertrand Russell. Pedagógicamente tiene menos ventajas, porque el robo no produce ganancias para el entendimiento.

Ya hemos señalado que muchos profesores, especialmente a nivel de *college*, prefieren explicar aproximaciones axiomáticas rigurosas porque favorecen su propio interés profesional a expensas de los estudiantes. Incluso si estos sistemas pudieran llegar a ser comprensibles para los jóvenes, el tiempo necesario para enseñarles se debería emplear en cuestiones de mayor interés. En esta materia, así como en la presentación de sofisticadas demostraciones rigurosas, los profesores están obrando por interés propio, no sólo por la forma en que explican las matemáticas, sino también por

enseñar de forma prematura temas tales como los conceptos del álgebra abstracta, los espacios vectoriales lineales, las geometrías finitas, la teoría de conjuntos, la lógica simbólica y las matrices, porque son temas avanzados y satisfacen el ego del profesor. No es extraño que los estudiantes se sientan alienados y pongan en duda la importancia de lo que se les está enseñando.

Cualesquiera que sean las razones por las que los profesores insisten en presentar demostraciones rigurosas a los jóvenes, se están engañando a sí mismos. Como ya hemos señalado (cap. 5), no hay demostraciones rigurosas definitivas. Esto se deduce del mismo camino que siguen las matemáticas en su desarrollo. El gran investigador matemático y pedagogo Felix Klein lo expresó así: «De hecho, las matemáticas han crecido como un árbol, que no nace de sus más pequeñas raicillas y crece simplemente hacia arriba, sino que antes envía sus raíces a más y más profundidad al mismo ritmo y en la misma medida en que sus ramas y hojas se extienden hacia arriba. ... *Vemos, entonces, que en lo que se refiere a las investigaciones fundamentales en matemáticas, no hay conclusión final, ni por tanto tampoco un punto de partida definitivo que puedan ofrecer una base absoluta para la enseñanza.*» Poincaré expresó un punto de vista similar. No hay problemas resueltos; sólo hay problemas que están más o menos resueltos. Las matemáticas serán tan correctas como los seres humanos, y los humanos son falibles.

En ninguna época de la historia de las matemáticas hemos estado menos seguros de qué es el rigor. Por tanto, ninguna demostración es realmente completa, y el profesor debe siempre llegar a un convenio. Sería interesante saber cuántos profesores están enterados de que la teoría de conjuntos, que ahora consideran un comienzo indispensable para cualquier interpretación rigurosa de las matemáticas, ha sido la fuente de nuestras más profundas y también más insuperables dificultades lógicas. Aquellos que no tengan conciencia de los problemas fundamentales deberían al menos recordar las palabras de uno de los mayores matemáticos de nuestro tiempo, Hermann Weyl: «La cuestión de los fundamentos y el significado últimos de las matemáticas permanece abierta; no sabemos en qué dirección se encontrará la solución final, ni siquiera si cabe esperar una respuesta final objetiva. El "matematizar" podría ser muy bien una actividad creadora del hombre, como el lenguaje o la música, de origen primitivo, cuyas decisiones históricas desafíen toda racionalización objetiva completa.»

Aunque la interpretación deductiva axiomática y rigurosa se vea favorecida, hay indicaciones de que algunos de los profesores que la explican no están realmente seguros de que esto sea correcto. Algunos libros de cálculo parten de definiciones y teoremas rigurosos, los referentes a límites y continuidad, por ejemplo, y luego no vuelven a hacer referencia a este tema. Están estructurados como un libro de recetas. Lo más caricativo que se puede decir de tales libros es que tal vez sus autores desean tranquilizar sus conciencias o dar a los estudiantes una cierta idea de lo que significa el rigor. Quizá sea una opinión más exacta decir que estos libros ofrecen tan sólo una apariencia de rigor para satisfacer dos mercados: el que pide rigor y el que se contenta con la enseñanza de procedimientos mecánicos.

Otros textos adoptan otro «compromiso». A lo largo de los textos la presentación es mecánica, con alguna concesión ocasional a la explicación intuitiva. La «verdadera explicación» está dada mediante demostraciones rigurosas, pero éstas aparecen como apéndices, y presentadas de una forma tan compacta que se puede tener la seguridad de que resultan totalmente incomprensibles para los estudiantes. Sin embargo, los autores han salvado sus conciencias. Estos libros no difieren en nada de las antiguas explicaciones rutinarias. Tan sólo mejoran nuestra comprensión de una cosa: muestran que hay matemáticos competentes que son ineptos para la pedagogía.

Por las diversas razones que hemos ido citando, las matemáticas modernas están ahora de moda. Pero la moda, como decía Oscar Wilde, es la momentánea conversión de lo fantástico en universal.

11. LA DIRECCION CONVENIENTE PARA UNA REFORMA

«La lógica puede ser paciente porque es eterna.»

Oliver Heaviside

Hemos mostrado que el plan tradicional es insatisfactorio en varios aspectos y que el nuevo plan de matemáticas ciertamente no remedia los defectos del plan tradicional. Por añadidura, posee nuevos defectos. ¿En qué dirección debería orientarse entonces una reforma eficaz? De entrada, esta dirección debe ser diametralmente opuesta a la que han tomado las nuevas matemáticas.

Antes de poder hablar del planteamiento y el contenido del plan conveniente para enseñanza primaria y secundaria, debemos ver cuáles son los objetivos o fines de estas fases de la educación. A nivel de la enseñanza primaria podemos dejar de lado la preparación para el *college*. Sólo un pequeño porcentaje de estos estudiantes irá al *college*. Incluso a nivel de secundaria, en el que aproximadamente un 50 por 100 de los graduados ingresan en el *college*, los estudiantes todavía ignoran la naturaleza y la importancia de los varios temas que se les pide que aprendan. En muchas materias, incluyendo las matemáticas (con excepción de la aritmética), lo que se brinda en la enseñanza secundaria es tan sólo una introducción. Además, muy pocos de los estudiantes que pasen al *college* se especializarán en matemáticas. Incluso a los que piensan que se harán matemáticos se les debe aconsejar que no se especialicen hasta que no conozcan mucho mejor el contenido de las distintas materias. Luego la educación para todos estos estudiantes debería ser más amplia que profunda. Debería ser una verdadera educación en humanidades, en la que los estudiantes no solamente aprendieran cuál es el contenido de cada materia, sino también qué papel juega en nuestra cultura y en nuestra sociedad. No se debería intentar preparar profesionales de las matemáticas ni habría que preocuparse por lo que el estudio futuro de las matemáticas pudiera requerir. Desde esta perspectiva, ¿qué pueden ofrecer las matemáticas además de la aritmética de uso diario?

Las matemáticas son la llave de nuestra comprensión del mundo físico; nos dan poder sobre la naturaleza, y le han dado al hombre la convicción de que puede continuar profundizando en los secretos de la naturaleza. Las matemáticas han permitido a los pintores pintar de forma realista y no sólo han hecho posible la comprensión de los sonidos musicales, sino también el análisis de tales sonidos que es indispensable para la construcción del teléfono, el fonógrafo, la radio y otros instrumentos de grabación y reproducción de sonidos. Las matemáticas se han hecho cada vez más valiosas para la investigación biológica y médica. La pregunta «¿Qué es la verdad?» no se puede discutir sin hablar del papel que las matemáticas han jugado para convencer al hombre de que puede o no alcanzar verdades. Gran parte de nuestra literatura está impregnada de temas que tratan cuestiones matemáticas. De hecho, a menudo es imposible comprender a muchos escritores y poetas a menos que se conozca la influencia que en ellos han tenido las matemáticas. Finalmente, las matemáticas son indispensables para nuestra tecnología.

¿Deberían resaltarse en los cursos de matemáticas esta entidad y estas aplicaciones? ¡Ciertamente! El conocimiento es un todo y las matemáticas son una parte del todo. No se desarrollan por separado de las demás actividades e intereses. Enseñar las matemáticas como una disciplina aparte es una perversión, una corrupción y una distorsión del verdadero conocimiento. Si nos vemos impulsados por razones prácticas a separar la enseñanza en matemáticas, ciencias, historia y otras materias, reconozcamos al menos que esta separación es artificial y falsa. Cada materia representa una aproximación al conocimiento, y cualquier mezcla o superposición que sea conveniente y pedagógicamente útil es deseable y debe ser bienvenida.

De esta forma, modelaríamos y enseñaríamos más allá de las propias matemáticas, las relaciones de las matemáticas con otros intereses humanos; en otras palabras, un plan de matemáticas culturalmente amplio que buscaría su íntima unión con las principales corrientes del pensamiento y de nuestra herencia cultural. Algunas de estas relaciones podrían proporcionar una motivación, otras serían aplicaciones y otras suministrarían lecturas interesantes y material para discusiones que darían variedad y vitalidad al contenido de nuestros cursos de matemáticas.

¿Pueden tratarse estos temas a nivel de enseñanza primaria y secundaria? Naturalmente. De hecho, si incluso los niveles elementales de las matemáticas no tuvieran íntima relación con las ramas principales y más vivas de nuestra cultura, la materia no merecería un lugar importante en el plan de estudios.

La necesidad de relacionar las matemáticas con nuestra cultura ha sido subrayada por Alfred North Whitehead, el más profundo de los filósofos de nuestra época y un hombre capacitado para el pensamiento abstracto más exigente. En su artículo «The Aims of Education», escrito en 1912, Whitehead dice:

> En la educación científica, lo primero que hay que hacer con una idea es demostrarla. Pero permítaseme por un momento ampliar el significado de «demostrar»; quiero decir demostrar su valor...
>
> Lo que pido es que se ponga fin a la fatal desconexión de los temas que mata la vitalidad de nuestro moderno plan de estudios. Sólo hay una cosa que se deba enseñar: la vida en todas sus manifestaciones. En vez de esta sencilla unidad, ofrecemos a los niños un álgebra y una geometría no relacionados con nada...
>
> Volvamos a las ecuaciones cuadráticas... ¿Por qué tenemos que enseñar a los niños su resolución?
>
> Las ecuaciones cuadráticas son parte del álgebra, y el álge-

bra es un instrumento intelectual para clarificar los aspectos cuantitativos del mundo.

En su ensayo de 1912, «Mathematics and Liberal Education» (publicado en *Essays in Science and Philosophy*), Whitehead va más lejos.

Las matemáticas elementales... deben ser depuradas de todo elemento que sólo pueda justificarse de cara a estudios posteriores. No puede haber nada más destructivo para una verdadera educación que el gastar largas horas en la adquisición de ideas y métodos que no llevan a ningún sitio... La sola idea de aprender tiene un sentido muy extendido de aburrimiento. Yo lo atribuyo a que [a los estudiantes] se les enseñan muchas cosas simplemente en el aire, cosas que no tienen ninguna coherencia con los pensamientos que surgen naturalmente en cualquier persona que viva en este mundo moderno, independientemente de que sea o no un intelectual. Todo el aparato de enseñanza les parece un sinsentido...

Ahora bien, lo que queremos es que nuestros alumnos desarrollen la capacidad de aplicar las ideas al universo concreto... El estudio del álgebra debería comenzar con el estudio sistemático de las aplicaciones de la idea matemática de cantidad en alguna cuestión importante.

[En geometría, igualmente, el plan] debería ser rígidamente depurado de todo lo que pudiera parecer a los estudiantes como simples curiosidades sin importancia...

¿Cuál es en pocas palabras el resultado final de nuestra reflexión? Que los elementos de matemáticas deberían tratarse como el estudio de un conjunto de ideas fundamentales, cuya importancia pueda apreciar el estudiante inmediatamente; que los enunciados y métodos que no puedan pasar esta prueba, independientemente de su importancia para estudios más avanzados, deberían suprimirse inexorablemente... Este tosco resumen puede resumirse a su vez en un principio esencial: simplificar los detalles y resaltar los principios y las aplicaciones importantes.

En 1912, Whitehead hablaba del plan tradicional, pero sus críticas y recomendaciones son hoy aún más válidas.

Las matemáticas no son un cuerpo de conocimientos aislado y autosuficiente. Existen en principio para ayudar al hombre a comprender y dominar el mundo físico, económico y social. Responden a fines y propósitos determinados. Debemos mostrar constantemente su utilidad fuera de su propio campo. Podemos esperar y tratar de inculcar el interés y el gusto por las matemáticas, pero éstos deben ser subproductos de un objetivo más amplio: mostrar para qué sirven las matemáticas.

Hay quienes han llegado a recomendar que se combine la enseñanza de las matemáticas y la ciencia. El profesor E. H. Moore, un notable matemático, que estuvo en la Universidad de Chicago, se refirió en su artículo «On the Foundations of Mathematics» al problema de la enseñanza de las matemáticas, recomendando que se combinaran las matemáticas y la ciencia a nivel de enseñanza secundaria. Pidió que se pusiera fin a la separación artificial entre matemáticas puras y aplicadas, y que se hiciese un programa conjunto a nivel secundario de matemáticas y ciencias. De esta forma se podía suscitar en los estudiantes «el sentimiento de que las matemáticas son una realidad fundamental del pensamiento y no una simple cuestión de símbolos, reglas y convenios arbitrarios».

Tanto si se las combina con la ciencia como si no, el presentar las matemáticas como una parte de los esfuerzos del hombre para comprender y dominar su mundo, podría dar a los estudiantes las razones históricas y actuales por las que este campo tiene tan gran importancia. Esta es también la primera razón para la presencia de las matemáticas en el plan. Estamos, por tanto, obligados a explicitar esta significación de las matemáticas. Lo contrario es engañar al estudiante sobre la utilidad de sus estudios.

El que nos ocupemos de los estudiantes en general no significa que demos de lado a los futuros profesionales. Un pequeño porcentaje de estudiantes serán físicos, químicos, ingenieros, sociólogos, técnicos, estadísticos, etc. Es deseable que estos estudiantes aprendan, tan pronto como sea posible, cómo pueden ayudarles las matemáticas en su futuro trabajo. De hecho, si sintiéndose inclinados hacia una de estas carreras nosotros les mostramos cómo las matemáticas les serán útiles en ella, se interesarán en las matemáticas, en beneficio de sus carreras. Incluso si los estudiantes no se sienten inclinados hacia una carrera en particular, estamos obligados a abrirles las puertas del mundo poniendo en claro la naturaleza de las distintas profesiones. Un medio importante para lograrlo es mostrar el papel que juegan las matemáticas en estos campos.

Presentar las matemáticas como artes liberales requiere un cambio de punto de vista radical. Las interpretaciones tradicionales y modernas presentan las matemáticas como un continuo desarrollo acumulativo lógico. El álgebra precede a la geometría porque en ésta se utiliza el álgebra. La trigonometría viene tras la geometría porque ésta se utiliza en aquélla. Desde el nuevo enfoque se incluiría lo que fuera interesante, informativo y culturalmente significativo, con la ligera restricción tan sólo de incluir los primeros conceptos y técnicas que se usarán más tarde. En otras palabras, tendríamos una orientación objetiva, no temática.

Hasta aquí hemos hecho hincapié en que las matemáticas deben presentarse como parte integrante de una educación liberal. Igualmente vital es otro principio que debería guiar la presentación de las matemáticas, un principio descuidado por el plan tradicional y más aún incluso por el plan de matemática moderna. Se debe justificar la introducción de cada tema. Las matemáticas no atraen a la mayor parte de los estudiantes, y constantemente se preguntan «¿Por qué tengo que aprender esto?» Esta pregunta está completamente justificada.

Las matemáticas son una materia muy restringida. Hermann Weyl, que fue uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo y trabajó en muchas ramas de las matemáticas y la física matemática, dijo en 1951: «Se puede decir que las matemáticas hablan de cosas que no interesan al hombre en absoluto... Parece una ironía de la creación el que la mente del hombre sepa manejar mejor aquellas cosas que más lejos están del centro de su existencia. Así, somos especialmente capaces en aquellos terrenos en que el conocimiento importa menos: en matemáticas, especialmente en teoría numérica».

Las matemáticas trabajan con abstracciones y esto es, en sí mismo, una de sus más severas limitaciones. Un discurso sobre la naturaleza del hombre difícilmente puede ser algo tan rico, tan satisfactorio y capaz de colmar nuestra vida como el vivir con la gente, incluso aunque se pueda aprender mucho sobre la gente a partir de una discusión abstracta sobre el hombre. Hablar o leer acerca de los niños no es lo mismo que educar a los niños. Además de ser abstractas, las abstracciones matemáticas son algo alejado de nosotros. Las matemáticas tratan de números y de figuras geométricas y generalizaciones que surgen de estos conceptos básicos. Pero los números y las figuras geométricas son propiedades insignificantes de los objetos reales. Un rectángulo puede ser la forma de un trozo de tierra o el marco de un cuadro, pero la forma es algo incidental respecto al valor real de la tierra o de la pintura.

Las matemáticas no atraen, y puede que no deban atraer, al 98 por 100 de los estudiantes. Son un estudio esotérico, de atractivo exclusivamente intelectual y carentes del atractivo emocional que poseen, por ejemplo, la música y la pintura. El matemático creador puede obtener algunas compensaciones emocionales, como la satisfacción del ego, el orgullo del éxito y la gloria —compensaciones no demasiado nobles, en cualquier caso—, pero los estudiantes no pueden obtener ni siquiera esto del estudio de las matemáticas, o en todo caso, la intensidad de sus emociones es pequeña. El desafío intelectual puede mover a algunas personas, pero difícilmente se puede refutar a quienes sostienen que es más importante el desafío de construir una sociedad más humana y conseguir dirigentes honrados.

Entonces el interés de quienes no sean matemáticos no puede ser de origen matemático. Ya hemos señalado que es inútil tratar de interesar a los estudiantes en general en los números complejos pidiéndoles que resuelvan $x^2+1=0$. Puesto que los no matemáticos no se ocupan de resolver $x-2=0$, ¿por qué se iban a ocupar de resolver la ecuación anterior? Los textos de cálculo «motivan» muchos conceptos y teoremas aplicándolos al cálculo de áreas y volúmenes y longitudes de arcos. Pero éstas son también cuestiones matemáticas, y el hecho de que el cálculo nos permita resolverlas no le convierte en más absorbente para los no matemáticos. La falta de sentido para los estudiantes de muchos teoremas de geometría euclídea los ha indispuesto con la geometría; por tanto, el estudio de más geometría, incluso si es a través del cálculo, les despertará aversión por el cálculo antes que interés. El argumento de que el cálculo nos da poder para hacer lo que temas más elementales no pueden hacer, no impresiona ciertamente a los estudiantes que no desean por encima de todo calcular áreas, volúmenes y longitudes de arcos.

La motivación natural es el estudio de problemas reales, en gran parte físicos. Prácticamente las principales ramas de las matemáticas surgen como respuesta a tales problemas, y ciertamente a nivel elemental esta motivación es genuina. Quizá pueda parecer extraño que el mayor interés de las matemáticas sea exterior a las matemáticas, pero se debe contar con este hecho. Para la mayor parte de la gente, incluidos los grandes matemáticos, la riqueza y el interés de las matemáticas derivan de su uso en el estudio del mundo real. Las matemáticas son un medio para un fin. Se usan los conceptos y los razonamientos para lograr resultados acerca de cosas reales.

Cabría pensar que los profesores en todos los niveles de la enseñanza habrían advertido desde hace mucho la deplorable falta de motivación de las matemáticas y que en vez de buscar nuevos enfoques para los antiguos temas o bien nuevos temas, se habrían enfrentado con el problema de la motivación. Desde luego, hay algunas excusas aceptables para este fracaso. El profesor medio se ve obligado a seguir un plan que le han dado hecho. El profesor puede, en su propia clase, hacer algo para interesar a sus estudiantes, pero generalmente tiene un límite de tiempo para hacerlo así. Además, una revisión capaz de producir interés en los alumnos requeriría un nuevo planteamiento. Si esto llevara a la introducción de nuevos temas, no se le permitiría pasar de exponer el programa, y éste sería prohibido.

Pero los participantes en la reforma educacional no pueden excusarse por el fracaso en dar una motivación a las matemáticas. Los educadores en matemáticas han demostrado tener una visión limitada. Aunque su trabajo es enseñar a exponer las matemáticas, ni ellos mismos saben por qué son importantes las matemáticas y dónde entran en contacto con los problemas reales que pueden ser usados para interesar a los estudiantes. Hasta que se preparó el plan moderno, los profesores de *college* habían mostrado poco interés en los cursos de enseñanza primaria y secundaria. Dirigieron la elaboración del nuevo plan cuyos defectos ya hemos señalado. El problema de la motivación no fue afrontado.

Junto con cada tema debe explicarse el motivo de su interés. No sirve de nada asegurar a los estudiantes que algún día apreciarán la utilidad de las matemáticas que se les pide que aprendan. Si un tema tiene interés, entonces, como dice Whitehead, los estudiantes deben poder apreciar inmediatamente su importancia; o como expuso en *Aims of Educations*, «El interés de la materia debe introducirse aquí y ahora...» Si las matemáticas no reviven con el aire de la realidad, no podemos esperar que sobrevivan como parte importante de la educación liberal.

¿Interesan los problemas reales a los jóvenes? Los jóvenes viven en el mundo real y, como todos los seres humanos, sienten alguna curiosidad acerca de los fenómenos reales, o al menos es más fácil interesarles en ellos que interesarles en las matemáticas abstractas. Por consiguiente, hay grandes esperanzas de que el verdadero interés de las matemáticas sea también lo que interese a los estudiantes, y de hecho nuestra limitada experiencia ha mostrado que es así. Pero no basta con esto, se necesitan más cosas para asegurar un efectivo interés de los estudiantes. Si los acertijos, los juegos u otros trucos sirven a determinados niveles de edad, también pueden usarse, aunque no pueden constituir la principal fuente de interés, pues en ese caso los estudiantes tendrían una impresión equivocada sobre la utilidad de las matemáticas. Ciertamente queda mucho trabajo por hacer para buscar problemas que sean motivos de interés genuinos y significativos para el estudiante.

Para interesar a los estudiantes, no siempre es necesario que antes de introducir un tema matemático se trate un problema sacado de las ciencias o de la vida real. A veces es más conveniente introducir un tema matemático, presentar las matemáticas e inmediatamente después aplicarlas a una situación no matemática. Por ejemplo, un tema de geometría elemental es el de las líneas paralelas. Se puede explicar este tema y después mostrar cómo un simple teorema nos permite calcular la circunferencia de la tierra. La parábola puede explicarse en cuanto curva como un problema de lugar geométrico. Y luego puede enseñarse el uso de la parábola en la focalización y dirección de las ondas de luz y radio. Los dibujos de los faros de los automóviles, las antenas de radio, los reflectores e incluso las linternas comunes, muestran estos usos en situaciones reales. En álgebra estudiamos funciones lineales y cuadráticas. Estas pueden aplicarse en seguida para calcular la altura que alcanzarán una bola o un proyectil lanzados hacia lo alto, y si el proyectil podrá alcanzar una altura determinada. En estos tiempos de exploraciones espaciales, lanzamientos de cohetes y naves espaciales, puede ser un tema interesantísimo incluso si solamente pueden estudiarse a nivel de enseñanza secundaria los problemas más simples.

El que los pedagogos hayan descuidado los motivos de interés y las aplicaciones de las matemáticas es algo que ha dañado su enseñanza. Estos hombres han presentado el tallo, pero no las flores, y así no han conseguido mostrar el verdadero valor de lo que enseñan. Piden a los estudiantes que batallen, pero no les dicen por qué. Incluso el ejército de los Estados Unidos lo sabe algo mejor. En parte, la paupérrima enseñanza de las matemáticas puede relacionarse con el hecho de que los profesores las explican como si no tuviesen ninguna relación con nada exterior a sus confines técnicos. Lo más triste en la enseñanza de las matemáticas —antiguas o nuevas— no es que los profesores no sepan qué es lo que enseñan, sino que ignoran por qué es importante, y por consiguiente no pueden explicárselo a sus alumnos.

Hay muchos profesores y maestros que piensan que la motivación y la aplicación de las matemáticas salen del legítimo contenido de los cursos. Pero saber para qué sirven las matemáticas forma parte del conocimiento matemático. Además, a falta de motivos de intéres, los estudiantes no estudiarán matemáticas, y en consecuencia poco es lo que se consigue enseñando tan sólo matemáticas. Plutarco dijo que «la mente no es un vaso que debe llenarse, sino un fuego que debe encenderse». El interés es lo que enciende el fuego.

El uso de problemas reales y especialmente físicos no sólo sirve para hacer interesantes las matemáticas, sino también para darles un significado. Los números negativos no son sólo los inversos de los números positivos con respecto a la suma, sino también los grados por debajo de cero en un termómetro. La elipse no es sólo un lugar geométrico particular, sino también la trayectoria de un planeta o un cometa. Las funciones no son conjuntos de pares ordenados, sino relaciones entre variables reales como la altura y el tiempo de vuelo de una pelota lanzada por el aire, la distancia a un planeta desde el sol en diferentes tiempos del año, y la población de un país a lo largo de los años. Las funciones son leyes del universo y de la sociedad. Los conceptos matemáticos surgieron de tales situaciones o fenómenos físicos y sus significados eran físicos para quienes crearon las matemáticas por vez primera. Privar a los conceptos de sus significados es conservar la cáscara y arrojar la fruta.

Incluso uno de los principales grupos del plan, The Secondary School Curriculum Committee of the National Council of Teachers of Mahtematics, subrayó la importancia de las aplicaciones para dar significado a las matemáticas: «Las aplicaciones de las matemáticas son importantes como medio a través del cual se puede apreciar en profundidad el valor instrumental de las matemáticas y como ayuda para clarificar e ilustrar el contenido de las matemáticas.» Igualmente, diversas personas que trabajaron en el plan de matemática moderna han hablado y escrito en favor de las aplicaciones. Uno de estos hombres llegó a decir que si en el estudio de las matemáticas no hubiese aplicaciones físicas sería necesario inventar algunas. Sólo que los textos están desprovistos de tales aplicaciones.

El desarrollo de las matemáticas a partir de situaciones reales tiene otra ventaja. Una de las más grandes dificultades que los estudiantes encuentran en las matemáticas es la solución de problemas planteados verbalmente. No saben cómo traducir la información verbal en forma matemática. Con la presentación habitual en los planes de matemáticas tradicional y moderna, esta dificultad es previsible. Las matemáticas se presentan por y para sí mismas, divorciadas del significado físico, y después se les exige a los estudiantes relacionar estas matemáticas aisladas y sin sentido con las situaciones reales. Claramente no tienen base a partir de la cual pensar sobre tales situaciones. Por otro lado, cuando las matemáticas surgen de problemas reales, la dificultad de traducción queda resuelta automáticamente.

En lo que se refiere a la manera práctica de presentar las matemáticas, hay otro principio que debería seguirse. Las matemáticas no deberían desarrollarse deductivamente, sino constructivamente. Por otra parte, hoy se dice que se debería enseñar a descubrir. Los charloteos sobre este principio llenarían muchos volúmenes, pero su práctica se reduce al conjunto vacío. El planteamiento constructivo significaría que los estudiantes deberían construir los teoremas y las demostraciones. Los estudiantes crearían las matemáticas. Naturalmente estarían realmente recreándolas con ayuda del profesor. Podrían llegar a hacerlo si se les permitiera e incluso animara a pensar intuitivamente, pero no se puede esperar de ellos que «descubran» nada en el marco de un desarrollo lógico que es casi siempre una reconstrucción muy sofisticada y artificial del trabajo creativo original. El planteamiento constructivo asegura la comprensión y enseña a pensar de forma independiente y productiva.

Enseñar a descubrir no es de ningún modo un trabajo sencillo. Exige que los estudiantes aprendan a usar la intuición, a hacer suposiciones, a tantear, a generalizar resultados conocidos, a relacionar lo que se busca con los resultados ya conocidos, a utilizar interpretaciones geométricas de proposiciones algebraicas, a medir, y docenas de otros procedimientos. Es relativamente fácil conseguir que los estudiantes vean que de

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 3 &= 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 3^2 \end{aligned}$$

podemos inferir que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2;$$

en otras palabras, que la suma de los n primeros números impares es n^2. Igualmente el dibujo de un triángulo isósceles sugiere enseguida que los ángulos de la base son iguales. Midiendo los lados de varios triángulos rectángulos llevaremos a los estudiantes a la conclusión de que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Pero, casi siempre, el enseñar a descubrir exige la preparación cuidadosa de una serie de preguntas sencillas que gradualmente conducen a las conclusiones deseadas. Incluso el enseñar a descubrir resultados tan relativamente sencillos como la fórmula cuadrática no es sencillo en absoluto.

El método socrático de hacer preguntas que lleven a los estudiantes a descubrir un resultado debe usarse juiciosamente. Las preguntas deben ser razonables y que puedan ser respondidas por la mayor parte de los estudiantes. De otra manera, los estudiantes se sentirán derrotados y se llegarán a desinteresar. Los estudiantes deben adquirir confianza en su propia capacidad. Será más fácil que lo consigan si contribuyen a la construcción de las matemáticas que si se les pide que aprendan un teorema sofisticado cuya demostración es el resultado de muchas remodelaciones de versiones anteriores y menos perfectas.

Es comprensible y de alguna manera justificable que los autores de artículos de investigación no den cuenta de todos los pensamientos, rodeos, falsos comienzos y conjeturas que les llevan a sus teoremas y demostraciones. Pero es deplorable que, por ocultar a los jóvenes la existencia de tanteos y esfuerzos infructuosos, demos la impresión de que los matemáticos razonan directa e indefectiblemente hacia sus conclusiones. No solamente privamos a los estudiantes del placer del descubrimiento, sino que destruimos la confianza en sí mismos que habrían podido desarrollar si les hubiésemos dicho la verdad y les hubiésemos permitido apreciar qué difícil es realmente descubrir un teorema acertado y su correspondiente demostración.

Los profesores están tan ansiosos de avanzar que presentan a los estudiantes los resultados y demostraciones finales, y puesto que los estudiantes no están preparados para asimilarlos, deben recurrir a aprénderselos de memoria. Para enseñar a pensar debemos dejar a los estudiantes pensar, dejar a los estudiantes obtener sus propios resultados y demostraciones, aun si son incorrectos. Dejar también que aprendan a juzgar por sí mismos el acierto de los resultados. No hagamos a los estudiantes tragar los hechos. No estamos metiendo objetos en un baúl. Este tipo de enseñanza embota la mente en vez de avivarla.

La cultura es tanto un proceso como un producto. Hasta el siglo XVI, «cultura» significaba cultivo del suelo, y, como sabemos, no se entierra la fruta. Se plantan semillas y se las alimenta. Enseñar a los estudiantes a conseguir conocimientos es una parte de la educación liberal. Deberíamos tratar de que los estudiantes quisieran conseguir conocimientos, no pregonárselos.

La afirmación comúnmente aceptada de que las matemáticas enseñan a la gente a pensar no ha sido comprobada. La enseñanza de las matemáticas, viejas y nuevas, no está preparada para enseñar a la gente a pensar, sino a seguir a un guía, el profesor. En el plan tradicional se enseña a los estudiantes a seguir los procesos y repetir las demostraciones. Hoy, con las nuevas matemáticas, los estudiantes aprenden de memoria la definiciones y las demostraciones. De hecho, se ven obligados a estudiar de memoria porque el nivel de los temas está fuera de su alcance.

El principio genético es de enorme ayuda como guía para desarrollar las matemáticas constructivamente. Este principio dice que el orden histórico es habitualmente el orden de exposición adecuado y que las dificultades que los mismos matemáticos han experimentado son exactamente las que encontrarán los estudiantes. Los números irracionales, negativos y complejos se les atragantaron a los mejores matemáticos. Podemos estar seguros, entonces, de que los estudiantes van a tener problemas con estos números. Luego debemos prever estas dificultades y ayudarles a superarlas, y podemos seguir en gran medida el mismo camino que siguieron los matemáticos hasta llegar a aceptar estos números y a trabajar con ellos. La extensión de la ley distributiva a los números negativos no será de ninguna ayuda para que los estudiantes se sientan a gusto con ellos.

La enseñanza constructiva, como ya hemos señalado, no es nada fácil. Pero no hay caminos fáciles. Para disfrutar de la vista desde lo alto de una montaña es preciso escalarla. En matemáticas no hay teleféricos. Los cables se rompen en la mente de los jóvenes. El verdadero arte de enseñar reside sólo en la utilización hábil de los procesos de descubrimiento. Con este enfoque estimulamos y desarrollamos el poder creativo del estudiante y le damos el placer del descubrimiento.

Habiendo conseguido que los estudiantes descubran un resultado, por cualquier medio, surge la cuestión de la demostración. No hay duda de que la demostración deductiva es la piedra de toque de las matemáticas. Ningún resultado es aceptado en el cuerpo de las matemáticas hasta que ha sido demostrado deductivamente a partir de un conjunto explícito de axiomas. Sin embargo, la demostración como criterio de aceptación de un resultado por los matemáticos y la demostración desde el punto de vista de la pedagogía son cosas diferentes. Ya hemos tenido ocasión (capítulos 4 y 5) de señalar el gran error que supone insistir en las demostraciones lógicas o deductivas como interpretación pedagógica de las matemáticas. ¿Qué alternativa existe?

Contrariamente a lo que se ha hecho durante generaciones en algunas ramas de las matemáticas, como la geometría euclídea, en que la enseñanza de la demostración deductiva ha sido el objetivo principal, y contrariamente al enfoque del plan de matemática moderna, el planteamiento básico de cualquier nueva materia a cualquier nivel debe ser intuitiva. Esta recomendación puede parecer una traición a las matemáticas, pero es una muestra de lealtad a la pedagogía.

Es verdad que la naturaleza de la intuición es algo vago. Se refiere a cierta captación directa de una idea, tanto si se trata de un concepto como de una demostración. Podía haber una especial facultad intuitiva distinta de la facultad lógica que critica y razona. Independientemente de que haya o no una facultad intuitiva, hay ayudas específicas y explícitas a la intuición que le permiten funcionar. En primer lugar, las matemáticas se comprenden a través de los sentidos, pues, como ya dijo Aristóteles, no hay nada en el intelecto que no haya estado primero en los sentidos —aunque Leibniz añadiese, excepto el intelecto mismo—. Por consiguiente, un recurso muy útil será el dibujo. Por ejemplo, podemos mostrar varios triángulos para inculcar la *idea* en vez de la definición: la unión de tres puntos no alineados y los segmentos que los unen. La mayor parte de los estudiantes incluso después de haber aprendido cómo multiplicar $a + b$ por $a + b$, sea mecánica o lógicamente, dirán que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Un dibujo puede ayudar. En el dibujo (fig. 11.1) resulta evidente que el área de un cuadrado cuyo lado vale $a + b$ es $a^2 + 2ab + b^2$.

Incluimos en la interpretación intuitiva lo que a menudo se llaman argumentos heurísticos. Gracias a la experiencia con objetos reales un niño puede aprender que $3 + 4 = 4 + 3$. La generalización de que $a + b = b + a$ es heurística.

El razonamiento por analogía, aunque no sea deductivo sino heurístico, puede emplearse con gran utilidad. Los estudiantes tienen grandes problemas al trabajar con números irracionales expresados mediante radicales. Veamos si $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$. Podemos establecer una analogía con $\sqrt{4} + \sqrt{9}$. Está claro que esta suma no es igual a $\sqrt{13}$. Por tanto, estaremos de acuerdo en que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no es igual a $\sqrt{5}$. Por otro lado, consideremos $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$. ¿Es igual a $\sqrt{6}$? La respuesta puede obtenerse tomando $\sqrt{4} \times \sqrt{9}$. Esto es igual a $\sqrt{36}$. Por tanto, obtendremos que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. De hecho, los hindúes y los árabes, que fueron los primeros en trabajar con radicales, razonaban

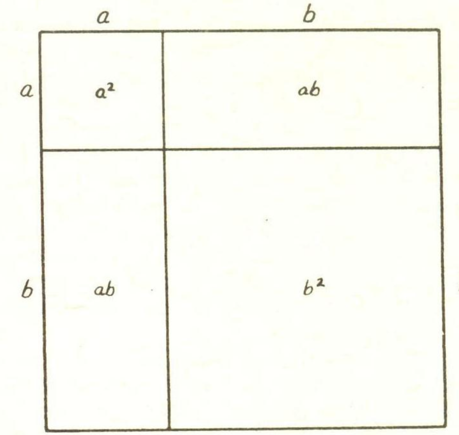

FIGURA 11.1

completamente por analogía; y los europeos que aprendieron estas operaciones de los árabes hicieron lo mismo. Las bases lógicas de los números irracionales no fueron formuladas hasta el final del siglo XIX.

Se puede facilitar la intuición mediante argumentos físicos. Entre las operaciones con números negativos, la multiplicación de números positivos y negativos es causa de continuos problemas. Una explicación muy conocida mediante pérdidas y ganancias puede convencer a los estudiantes. Aceptemos que en cuestiones de dinero una ganancia se representa con un número positivo y una pérdida con un número negativo. También representaremos el tiempo futuro con un número positivo y el tiempo pasado con un número negativo. Ahora podemos usar los números negativos para calcular el aumento o disminución de la riqueza de un hombre. Así, si gana cinco dólares al día, tres días después será quince dólares más rico. En símbolos, $(+5)(+3) = 15$. Si pierde cinco dólares al día, entonces tres días más tarde será quince dólares más pobre. En símbolos,

$(-5)(+3) = -15$. Si gana cinco dólares, entonces tres días antes era quince dólares más pobre. En símbolos, $(+5)(-3) = -15$. Finalmente, si pierde cinco dólares al día, entonces hace tres días era quince dólares más rico. En símbolos, $(-5)(-3) = 15$. Pueden usarse para reforzar estas reglas de multiplicación otras situaciones tales como las del agua saliendo de un tanque. Muchos textos usan para enseñar las mismas reglas lo que se llama línea numérica y efectúan movimientos hacia adelante y atrás sobre ella. Probablemente todo ello debe usarse. Tales presentaciones concretas pueden convencer a los estudiantes de que las definiciones para la multiplicación con números negativos son razonables y útiles.

Otro ejemplo de utilización de hechos físicos es argumentar que la velocidad a la máxima altura de una pelota lanzada al aire es cero, porque si fuera positiva continuaría subiendo, y si fuese negativa estaría cayendo. Tal argumento puede usarse para hacer que los estudiantes igualen la velocidad a cero para calcular el tiempo que tarda la pelota en alcanzar la máxima altura.

Todos los recursos citados, los dibujos, los argumentos heurísticos, la inducción, el razonamiento por analogía y los argumentos físicos son recursos intuitivos. Naturalmente la intuición no es algo estático. Así como nuestra intuición acerca de lo que cabe esperar del comportamiento humano mejora con la experiencia, lo mismo sucede con la intuición matemática. Nos puede sugerir, como se lo sugirió a Leibniz, que la derivada del producto de dos funciones es el producto de sus derivadas. Esta conclusión deberá comprobarse (otra medida heurística), y naturalmente se encontrará que es falsa. Un análisis más profundo mostrará que lo que se verifica para límites de funciones no se verifica para derivadas, y la intuición se afinará con la experiencia.

Naturalmente, la intuición puede inducir a error, pero cometer errores y aprender a controlar los propios resultados es parte del proceso de aprendizaje. La verdad, señalaba Francis Bacon, surge más fácilmente del error que de la confusión. Si el temor a equivocarse fuese un obstáculo,

un niño nunca aprendería a caminar; y un estudiante que no cometa errores no hará nada de nada.

El enfoque intuitivo es también recomendable porque es relativamente fácil dar una motivación genuina o significativa a un tema matemático cuando se introduce intuitiva o heurísticamente, pues los problemas físicos son el punto de partida natural para un enfoque intuitivo. Con el planteamiento lógico, por el contrario, es mucho más difícil motivar el interés, porque se encuentra alejada de la realidad y con frecuencia resulta artificial. ¿Cómo es posible justificar el interés de las fracciones si se las introduce como conjuntos de pares ordenados y equivalentes de números naturales?

Nuestra opinión es que la comprensión se consigue intuitivamente y que la exposición lógica es, en el mejor de los casos, una ayuda subordinada y suplementaria para la enseñanza, y en el peor, un obstáculo decisivo. Por tanto, en vez de presentar las matemáticas tan rigurosamente como sea posible, deberían presentarse tan intuitivamente como fuese posible. Como ha dicho el profesor Max M. Schiffer, de la Universidad de Stanford: «Nunca se deben poner los carros lógicos delante de los caballos heurísticos». Herman Weyl definía así el papel de la lógica: «La lógica es la higiene que los matemáticos practican para mantener las ideas sanas y fuertes». Y Jacques Hadamard, otro de los más famosos matemáticos de nuestro tiempo, subrayaba que la lógica tan sólo sanciona las conquistas de la intuición. Por lo que a la comprensión se refiere, el sustituir la intuición por la lógica equivale, en palabras del filósofo Arthur Schopenhauer, a amputarse las piernas para caminar con muletas.

Es significativo que cuando un matemático lee un teorema que contradice lo que esperaba intuitivamente, su primer impulso no es dudar de su intuición, sino de la demostración. Confía más en su intuición. Si después de haber comprobado la demostración cuidadosamente se convence de que es correcta, entonces trata de saber en qué se ha equivocado su intuición.

El enfoque intuitivo puede reforzarse enormemente incorporando a las clases de matemáticas lo que a menudo se llama un laboratorio de matemáticas. Este consiste en aparatos de varias clases que pueden usarse para mostrar hechos físicos de los que se pueden inferir resultados matemáticos. Se han diseñado algunos sencillos mecanismos de laboratorio, de los que se hace un uso limitado. Uno de ellos son las barras (de Cuisenaire), que no son más que tacos de varias longitudes con los que se pueden hacer operaciones aritméticas con enteros positivos y negativos. Un segundo mecanismo, llamado *geoboard* (introducido por Caleb Gattegno), es un tablero de madera con filas y columnas de clavos. Tendiendo gomas elásticas entre los clavos se pueden formar varias figuras geométricas y demostrar relaciones sencillas. Otro mecanismo funciona sujetando objetos de varios pesos a un resorte y mostrando que la longitud del resorte es proporcional al peso. Esta demostración sirve para introducir la función lineal $y = kx$, en donde k depende de la extensión del resorte. Otro mecanismo es el péndulo. Se puede alargar o acortar la longitud del péndulo y medir el período del péndulo para las diversas longitudes. El objetivo es hacer que los estudiantes encuentren la relación funcional entre la longitud del péndulo l y el período T. La fórmula exacta $T = (1/2\pi)\sqrt{l/32}$ no se obtiene fácilmente de esta manera, pero los números obtenidos por los estudiantes pueden usarse como base para inferir, con la ayuda del profesor, cuál es la fórmula precisa. Igualmente se puede pedir a los estudiantes que encuentren la fórmula que da l en los términos de T; ésta es $l = 128\,\pi^2 T^2$, que es un poco más fácil de descubrir, aunque de nuevo el profesor tendrá que ayudar a obtener la fórmula precisa. En cada caso los estudiantes verán la utilidad de las diferentes clases de relaciones funcionales. Con demasiada frecuencia se les explican a los estudiantes distintas funciones sin poner de relieve que para fenómenos físicos diferentes se requieren funciones diferentes.

Un instrumento excelente para avivar y enriquecer la enseñanza de la trigonometría es el osciloscopio. No es más que una televisión simplificada. Si hacemos vibrar cerca de un micrófono diapasones de diferentes frecuencias con distintas intensidades, el osciloscopio presenta en la pantalla la forma de funciones sinusoidales de varias frecuencias y amplitudes. Esto corresponde a sonidos simples. Haciendo a los estudiantes vocalizar varios sonidos o interpretar notas en varios instrumentos musicales, el osciloscopio muestra las gráficas de estos sonidos. Se ve fácilmente que estas gráficas son combinaciones de gráficas sinusoidales y así los estudiantes advierten que los sonidos vocales y musicales no son más que combinaciones de sonidos simples como los emitidos por los diapasones. Muchos fenómenos más pueden recogerse en la pantalla del osciloscopio. El punto principal, sin embargo, es dar vida a las funciones trigonométricas. Los estudiantes llegan a apreciar que estas funciones secas, frías, «artificiales», están presentes por doquiera. Se «habla» trigonometría cada vez que se pronuncia una palabra. Además, se les puede mostrar fácilmente cómo los conocimientos sobre el sonido pueden usarse en el diseño de un teléfono, un fonógrafo, una radio y otros instrumentos que graban o reproducen sonidos.

El material de laboratorio puede ser utilizado por los profesores para hacer demostraciones o por los mismos estudiantes para trabajar juntos en pequeños grupos. Aunque la idea del laboratorio de matemáticas no es nueva, no ha sido usada en amplia escala, ni se ha prestado bastante atención a la invención de mecanismos útiles e ingeniosos. Este interesante apoyo pedagógico ha sido descuidado. La financiación de la colaboración entre profesores de matemáticas e ingenieros para inventar material de laboratorio, un proyecto que nunca ha sido llevado a cabo, sería una forma mucho más acertada de gastar dinero que los diez millones de dólares dedicados al desarrollo del plan de matemáticas modernas.

¿La dependencia de la intuición, esté o no respaldada por demostraciones físicas, significa que las demostraciones rigurosas y el rigor no juegan ningún papel en la enseñanza de las matemáticas elementales? De ninguna manera. Después de que los estudiantes conocen a fondo un resultado y comprenden que un argumento es admisible, el profesor puede plantear una demostración deductiva. Sin embargo, la misma idea de demostración deductiva es algo que es preciso aprender, y sólo puede introducirse gradualmente. En ningún caso se deberá «empezar» con demostraciones deductivas, ni siquiera después de que los estudiantes hayan llegado a saber lo que significan. La demostración es el paso final. Además, el nivel de rigor debe adecuarse al nivel de desarrollo del estudiante. La demostración sólo debe convencer al estudiante. Debe permitírsele aceptar y usar algunos hechos que son tan obvios para él que no advertirá que los está usando. La capacidad para apreciar el rigor está en función de la edad matemática del estudiante, no de la edad de las matemáticas. Esta apreciación se adquiere gradualmente y los estudiantes deberían tener la misma libertad que tuvieron los grandes matemáticos para tomar atajos intuitivos. Sólo deberían introducirse las demostraciones de cualquier tipo cuando los estudiantes pensasen que eran necesarias. Las demostraciones tienen sentido cuando responden a las dudas de los estudiantes, cuando se demuestra algo que no es evidente. La intuición puede hacer volar al estudiante hasta una conclusión, pero cuando persistan dudas se le debe pedir que aplique la lógica para seguir el camino por tierra hacia el mismo objetivo.

Naturalmente, el nivel de rigor puede elevarse según progresa el estudiante. Poincaré decía sobre esto: «Por otro lado, cuando esté más adelantado, cuando se haya familiarizado más con el razonamiento matemático y su mente esté más madura por la misma experiencia, las dudas brotarán por sí mismas y entonces tu demostración será bien recibida. Nacerán nuevas dudas y se le plantearán al niño sucesivamente las mismas preguntas que se les plantearon a nuestros antecesores, hasta que sólo el rigor absoluto pueda satisfacerle. No es suficiente con dudar de todo, es necesario saber por qué se duda.» El rigor no refinará una intuición a la que no se ha permitido funcionar libremente. Los estudiantes deben experimentar el paso gradual de lo evidente a lo no tan evidente y a la necesidad de una demostración más completa. No se les impondrá la necesidad de rigor, sino que la descubrirán.

Esta aproximación al rigor es algo más que una concesión pedagógica. La imposición gradual del rigor es precisamente lo adecuado si se desea explicar cómo se desarrollan las matemáticas y cómo piensan los matemáticos.

E. H. Moore, en su artículo «On the Foundations of Mathematics», dice a propósito de esto: «Se plantea la cuestión de saber si los matemáticos abstractos no están perdiendo la visión del carácter evolutivo de todos los procesos vitales, en el individuo o en la raza, al precisar las metas y límites de la lógica y de las ciencias específicamente deductivas.»

Se ha exaltado el pensamiento crítico como uno de los resultados fundamentales del estudio de las matemáticas. Los portavoces de las matemáticas modernas se enorgullecen de haber promocionado el desarrollo del pensamiento crítico al hacer hincapié en el rigor. Pero la capacidad de los estudiantes para pensar críticamente es algo que debe desarrollarse. Si se les pide que asimilen y reflexionen críticamente sobre resultados a los que los matemáticos han tardado dos mil años en llegar, los estudiantes se sentirán abrumados, y en vez de pensar se darán por vencidos. Enfrentar a los estudiantes jóvenes con la formulación matemática sofisticada de ideas básicas es como pedir a los alumnos de un *kindergarten* que critiquen un trabajo de filosofía. No hay atajos en el desarrollo de la capacidad crítica. Como dijo E. H. Moore: «A cada edad le basta con su propio rigor». Y por edad entiende la edad del estudiante.

Afortunadamente, los jóvenes aceptan como rigurosas demostraciones que en realidad no lo son, y de ellas aprenden lo que es una demostración. ¿Es un engaño? ¡No! Es pedagogía. En cualquier caso es un engaño en el que caemos nosotros mismos. Al aumentar nuestra propia capacidad para comprender demostraciones más rigurosas, podemos ver los defectos de las demostraciones menos elaboradas que nos han enseñado y llegar a dominar demostraciones más sólidas. Así es también como los grandes matemáticos mejoraron gradualmente el rigor de sus resultados. Pero no olvidemos que no hay una demostración rigurosa definitiva. Los simbolismos de la moderna lógica simbólica, del álgebra de Boole, de la teoría de conjuntos y de los métodos axiomáticos no han conseguido ni pueden conseguir que las matemáticas sean perfectamente rigurosas.

Respecto a las técnicas de presentación, hay principios adicionales que deben observarse. En lugar de conceptos abstractos deberíamos presentar ejemplos concretos mientras fuera posible. Así, no importa si un estudiante no puede dar una definición general de función. Es suficiente que conozca funciones concretas tales como $y = 2x$ e $y = x^2$ y que aprenda a trabajar con ellas. Tras tener alguna experiencia con funciones, el estudiante podrá dar su propia definición. Y tampoco pasa nada si cuando tenga más experiencias debe modificar la definición. Esta es precisamente la forma en que procedieron los matemáticos desde 1700 hasta 1900. Igualmente, no importa si un estudiante sabe o no definir un polígono mientras pueda reconocerlo y trabajar con él. En este sentido un dibujo equivale a mil palabras. Sabemos lo que son los perros y los hombres, y afortunadamente los distinguimos sin haberlos definido. Piaget ha señalado que los jóvenes necesitan acumular capas de experiencia antes de poder dominar la abstracción. La comprensión, en todos los campos del conocimiento, sólo se alcanza y desarrolla con la experiencia. Como dijo Whitehead: «No hay un camino fácil para aprender siguiendo un sendero etéreo de brillantes generalizaciones... El problema de la enseñanza es conseguir que el alumno vea el bosque formado por los árboles.»

En vez de multiplicar la terminología deberíamos introducir tan pocos términos como fuese posible. Deberían usarse palabras comunes, preferiblemente aquellas ya familiares al estudiante, aunque se les dé un significado técnico. La terminología debería reducirse a un mínimo. Las palabras vienen después de la comprensión, y pueden ser las palabras del estudiante mejor que el lenguaje artificial y compacto de las matemáticas modernas.

Al igual que la terminología, el simbolismo debería reducirse al mínimo. Los símbolos asustan a los estudiantes. Además, el significado de los símbolos es algo que es preciso recordar, y por tanto resultan ser una carga con más

frecuencia que una ayuda. La ganancia en brevedad puede no compensar las desventajas.

Conviene decir algo acerca del contenido. Las dos consideraciones previamente discutidas, la necesidad de ofrecer una educación liberal y la necesidad de motivar a los chicos deberían tener prioridad en el momento de determinar el contenido de la enseñanza primaria y secundaria. Sería desde luego deseable, dada la naturaleza secuencial de las matemáticas, incluir aquellos temas que normalmente se enseñan a varios niveles, de forma que los estudiantes que sigan la materia a nivel de *college*, no sufran un retraso por la omisión de temas necesarios. Afortunadamente, es posible enseñar la mayor parte de los temas del plan tradicional justificando adecuadamente su interés y explicando su significado. Aunque afortunado, este hecho no es fortuito. Los temas tradicionales, con la excepción de unos pocos, y de una posible reordenación del álgebra, son los que han probado ser útiles, y por esto han sido enseñados con preferencia a otros muchos. Sin embargo, no se debería vacilar en prescindir de algunos si fuera posible poner a punto un programa más rico y más vivo. Por ejemplo, la estadística y el uso de los computadores son temas fundamentales y que despiertan interés. Algunos temas que sea preciso omitir y que sean necesarios para avanzar en las matemáticas pueden incluirse en cursos dirigidos a los estudiantes que vayan a dedicarse definitivamente a ellas.

Además de estas consideraciones, tenemos la cuestión de la prioridad en importancia de las matemáticas y la ciencia. No hay nada intrínsecamente malo en la teoría de conjuntos, y de hecho es algo esencial a nivel universitario. Pero no se le debe dedicar tiempo a niveles inferiores. Son más importantes la aritmética, el álgebra y la geometría, y la teoría de conjuntos no contribuye al aprendizaje de estos temas. Lo mismo se puede decir del álgebra de Boole, las congruencias, la lógica simbólica, las matrices y el álgebra abstracta.

Muchos defensores de las matemáticas modernas han reducido drásticamente la geometría euclídea. Así, los textos modernos usuales sustituyen en gran parte la geometría sintética por la geometría analítica. Algunos extremistas del modernismo querrían suprimir la geometría sintética. «Abajo Euclides» y «fuera Euclides» parecen ser las consignas de las nuevas matemáticas. Tal paso sería trágico. La geometría sintética es una parte esencial de las matemáticas cuya base es la geometría euclídea, pero además la geometría proporciona la interpretación gráfica de la mayor parte del trabajo analítico. Los matemáticos piensan habitualmente en términos de imágenes, y la geometría no sólo proporciona imágenes, sino que sugiere nuevos teoremas analíticos. Es increíble que matemáticos expertos pretendan abolir la geometría sintética.

Es muy conocida la historia del matemático que dando su clase se detiene de pronto a la mitad de una demostración. Se dirige hacia la pizarra, dibuja algunas figuras, las borra y luego puede continuar su clase. Esta anécdota resulta seriamente perturbadora en lo referente a la pedagogía, pero es un argumento a favor del empleo de figuras.

Por lo que se refiere al contenido de las matemáticas, los cambios deseables no exigen sino pequeñas modificaciones en el plan tradicional, y todo lo que se diga acerca de que la sociedad moderna requiere una clase totalmente nueva de matemáticas es un completo sinsentido.

No basta con esbozar el enfoque y el contenido de los cursos de matemáticas. La obsesión por el plan de estudios ha sido en gran parte una huida de la realidad. El problema más grave es la educación de los profesores. Puesto que el plan deberá proporcionar una educación liberal y ante todo motivar el interés por los temas que enseñamos, tendremos que buscar, respetar y pagar a una nueva clase de profesores, de matemáticos, que puedan dar la preparación adecuada a los profesores. El plan tradicional fue moldeado por matemáticos relativamente poco informados y sin conocimientos pedagógicos. El plan de matemáticas modernas fue elaborado conjuntamente por esta misma gente y por investigadores estrechamente especializados en matemáticas puras igualmente carentes de conocimientos pedagógicos. La gente que necesitamos tendrá que poseer amplitud de juicio no sólo en matemáticas, sino también en las diversas áreas en las que las matemáticas han influenciado nuestra cultura. Tendrán también que ser educadores. Esto significa que tendrán que saber qué demostraciones y qué abstracciones pueden manejar los jóvenes, y qué interesa a los chicos de diez años y a los de catorce. Además, la amplitud y apertura de juicio deseable en el profesor ideal requerirían que él viese también las matemáticas desde un punto de vista no matemático y que pudiese apreciar así las actitudes y problemas de los jóvenes. Dicho a grandes rasgos, el profesor de matemáticas ideal no sólo debería saber lo que enseña, sino también a quiénes se lo enseña. Necesitamos, en otras palabras, profesores de amplios conocimientos académicos y educativos, por oposición al investigador especializado y autocentrado.

Lo más probable es que el tipo de persona que necesitamos tendrá que haberse formado en los departamentos de matemáticas de las escuelas de graduados * y se encontrará vinculado a las universidades. El programa apropiado para preparar este tipo de personas no existe por el momento. Ni parece probable, desgraciadamente, que las escuelas de graduados vayan a encargarse de su preparación. La inercia y la estrechez de las escuelas de graduados pueden verse a partir de una cuestión estrechamente vinculada con ésta. Las escuelas de graduados preparan doctores para la investigación. Sin embargo, hace unos diez o quince años que se ha reconocido que la mayor parte de los doctores preparados por las escuelas de graduados, un setenta y cinco u ochenta por ciento, no investigan después de haber obtenido el doctorado. Esta gente se coloca en *colleges* o en pequeñas universidades en que la enseñanza es la actividad y el objetivo principales. Hace diez años, un comité conjunto de la American Mathematical Society y de la Mathematical Association of America recomendó que las escuelas de graduados ofreciesen un programa alternativo dirigido a la preparación de profesores de *college*, en vez de a la preparación de investigadores, buscando más la amplitud que la

* Las escuelas para graduados cubren en Estados Unidos las enseñanzas correspondientes a nuestros cursos de doctorado. (*N. del T.*)

profundidad. A estos hipotéticos profesores podría serles concedido el habitual grado de doctor o un nuevo grado llamado doctorado en artes. Pese a que esta recomendación parecía ser realista y prudente, ninguna de las más importantes escuelas de graduados del país la siguió. Hacia 1970, diez de las universidades menos prestigiosas comenzaron a experimentar este programa bajo subvención de la Carnegie Corporation. Conociendo a la administración de las universidades, cabe preguntarse si su principal incentivo para realizar el experimento fue lo acertado del programa o el acuerdo financiero.

Los profesores de universidad no están interesados en la formación de profesores de *college*. Consideran que este trabajo es degradante y rebaja la categoría de sus departamentos. La formación de matemáticos con la amplitud de miras y la capacidad necesarias para tratar los problemas pedagógicos de la enseñanza primaria y secundaria exigiría un abandono aún más radical de los programas orientados hacia la investigación, y los actuales profesores de universidad no dirigirán una preparación de esta índole y de hecho no están preparados para dirigirla.

Algunas universidades han tratado de enfrentarse al problema de formar mejores profesores de centros escolares contratando profesores universitarios de matemáticas para formar profesores escolares. Esta idea, fundamentalmente válida, no ha funcionado, y es interesante ver cuáles han sido las razones. Los matemáticos han visto siempre la formación de profesores de matemáticas como una actividad inferior (lo que estaba justificado en el pasado por la baja calidad de las escuelas de formación). Por tanto, los matemáticos que se sienten bien instalados en los departamentos de matemáticas no aceptarán trabajar en la formación de profesores escolares de matemáticas. Desgraciadamente, las universidades que trataron de contratar matemáticos universitarios para formar profesores escolares de matemáticas buscaron matemáticos con prestigio, y tales hombres se mostraron todos poco dispuestos a aceptar lo que sus colegas considerarían una posición inferior. A menudo se presentó el caso de que quienes se sentían atraídos por la

formación de profesores de matemáticas eran quienes o bien no habían tenido mucho éxito en su papel como matemáticos o quienes se sentían atraídos por factores tales como el dinero o el mayor prestigio de la universidad a la que irían. Pero estos hombres no tenían por qué ser buenos educadores y de hecho no lo son. Los más adecuados para formar profesores escolares de matemáticas serían claramente los matemáticos de amplia formación con un genuino interés por la educación, pero este tipo de personas no destaca en el mundo matemático, y sería más difícil de localizar. Además, sus nombres no darían prestigio a la universidad que los contratara, porque el prestigio de las matemáticas se construye sobre la investigación, y teniendo en cuenta la intensa especialización actual, esto casi siempre significa estrechez de miras. Por consiguiente, en la atmósfera de la universidad actual, todo esfuerzo para obtener matemáticos que se dediquen a la formación de profesorado conduce al cruce de un caballo y un asno (no importa quién es quién) y produce una progenie estéril o sólo consigue atraer a quienes no son ni lo uno ni lo otro y fracasan por ello.

La primera de las funciones de los matemáticos universitarios debería ser mejorar la formación de los profesores de matemáticas para la enseñanza primaria y secundaria. Actualmente el conocimiento de matemáticas que estos profesores poseen es a menudo inadecuado; tampoco se les pide que sepan nada sobre el uso y la importancia cultural de las matemáticas. En particular carecen de conocimientos científicos. Claramente tales profesores no están preparados para explicar la matemática como una parte de las humanidades, para justificar el interés de las matemáticas mediante problemas no matemáticos o para aplicar las matemáticas. La mayor parte de los profesores están convencidos de que las matemáticas son importantes y se lo dicen a sus estudiantes. Sin embargo, no pueden mostrar su importancia y así sus intentos para convencer a los estudiantes carecen de convicción. Los estudiantes pueden ver a través de las certidumbres vanas.

Hay también otras fuerzas que actúan contra la posibilidad de formar adecuadamente al profesorado. Un comité de la Mathematical Association of America, Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (CUPM), ha preparado un programa para la formación de profesores de matemáticas para la enseñanza secundaria. Los cursos de *college* recomendados para esta formación son los de geometría analítica y cálculo, álgebra abstracta, álgebra lineal, geometría, probabilidad y estadística, lógica y conjuntos. En absoluto se sugiere, ni mucho menos se exige, que estos futuros profesores deban estudiar ciencias.

En la actualidad los profesores escolares están en un dilema. Muchos viven en pequeñas comunidades que no están cercanas a las grandes universidades. Los que podrían matricularse en los cursos de matemáticas en la universidad no están mucho mejor. Si entran en el ciclo de graduados de la universidad tienen que seguir un programa de *master* o doctor en matemáticas. Los cursos de estos programas están dirigidos a formar investigadores matemáticos, y por tanto no ofrecen la amplitud que los profesores escolares necesitan. Además, los cursos son demasiado difíciles. La alternativa para los profesores es ir a una *School of Education* *. Aquí pueden aprender sobre la educación, pero no aprenden matemáticas. Así, los profesores no están en la mejor posición para juzgar qué es importante en matemáticas y desarrollar su competencia para enseñar y escribir textos escolares.

La formación de buenos profesores es mucho más importante que el plan de estudios. Tales profesores pueden hacer maravillas con cualquier plan. Recordemos cuántos buenos matemáticos se han formado con el plan tradicional, que es decididamente insatisfactorio. Un mal profesor y un buen plan darán una mala enseñanza, mientras que un buen profesor superará las deficiencias de cualquier plan.

¿Quién va a preparar el plan «correcto» para el futuro? Las personas adecuadas para hacerlo son los matemáticos de amplia formación y los profesores de escuelas primarias y secundarias maduros, experimentados y con una preparación suficiente. Se puede consultar a investigadores, psicólogos y educadores ordinarios, pero no deben ser ciertamente ellos quienes lleven el peso del trabajo. Por lo demás, los profesores escolares deberían ser los árbitros para establecer qué se debe enseñar y cómo debe enseñarse. Ellos son los únicos que han trabajado con jóvenes y que conocen la forma de interesarles y qué grado de abstracción pueden asimilar.

* Escuelas de formación de profesorado. (*N. del T.*)

¿Qué criterio de éxito debería utilizarse? No se debería buscar que los estudiantes avanzaran lo más posible en matemáticas —muchos centros de enseñanza secundaria se enorgullecen actualmente de que sus alumnos estudian cálculo—, ni que aprendieran nociones sofisticadas. Cuando el cincuenta por ciento de los graduados en enseñanza secundaria puedan decir honestamente que les gustan las matemáticas y que comprenden su significado, entonces habremos alcanzado un gran éxito en la enseñanza de las matemáticas.

A la vista de la vergonzosa historia de la enseñanza de las matemáticas, tanto en el pasado como en la actualidad, ¿cómo es posible que las matemáticas hayan sobrevivido en este país, y que tengamos unas matemáticas florecientes e incluso sólidas en términos generales? Pienso que lo que hemos conseguido se lo debemos a unos pocos profesores inteligentes, maduros y dedicados, que por su cuidado en la elección de lo que se debe resaltar y por su encanto y magnetismo personales han atraído a las matemáticas a algunos estudiantes. Son estos espíritus nobles quienes nos han salvado del desastre.

BIBLIOGRAFIA

Aichele, Douglas B. y Robert E. Reys: *Readings in Secondary School Mathematics*, Prindle, Weber and Schmidt, Inc., Boston, 1971.

Allendoerfer, C. B.: «The Narrow Mathematician», *American Mathematical Monthly*, 69, 1962, 461-469.

Begle, E. G.: «Open Letter to the Mathematical Community», *The Mathematics Teacher*, 59, 1966, 341 y 393. También en *Science*, 151, 1966, 632.

Birkhoff, George D.: «The Mathematical Nature of Physical Theories», *American Scientists*, 31, 1943, 281-310.

Cambridge Conference on School Mathematics: *Goals for School Mathematics*, Houghton Mifflin Co., Boston, 1963.

Carrier, George F., y otros: «Applied Mathematics: What is Needed in Research and Education», *SIAM Review*, 4, 1962, 297-320.

Council for Basic Education: *Five Views of the «New Math»*, Washington, D. C., abril 1965. Occasional Papers ≠8. Artículos de H. M. Bacon, A. Calandra, R. B. Davis, M. Kline, E. E. Moise.

Deans, Edwina: *Elementary School Mathematics: New Directions*, United States Office of Education, 1963.

DeMott, Benjamin: «The Math Wars», *The American Scholar*, Spring Issue, 1962, 296-310.

Fehr, Howard F.: «The Role of Physics in the Teaching of Mathematics», *International Symposium on the Coordination of Instruction in Mathematics and Physics*, Belgrado, 1962, 25-32.

Fehr, Howard F.: «Sense and Nonsense in a Modern School Mathematics Program», *The Arithmetic Teacher*, febrero 1966, 83-91.

Fehr, Howard F. y J. Fey: «The Secondary School Mathematics Curriculum Study», *American Mathematical Monthly*, 76, 1969, 1132-1137.

Feynman, Richard P.: «New Textbooks for the New Mathematics», *Engineering and Science*, 28, 1965, 9-15.

Fremont, Herbert: «New Mathematics and Old Dilemmas», *The Mathematics Teacher*, 60, 1967, 715-719.

Fremont, Herbert: *How to Teach Mathematics in Secondary Schools*, W. B. Saunders Co., Filadelfia, 1969.

Hammersley, J. M.: «On the Enfeeblement of Mathematical Skills by "Modern Mathematics" and by Similar Soft Intellectual Trash in Schools and Universities», *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*, octubre 1968, 66-85.

Heath, R., ed.: *New Curricula*, Harper and Row, 1964.

Herstein, I. N.: «On the Ph. D. in Mathematics», *American Mathematical Monthly*, 76, 1969, 818-824.

Khinchin, A. Ya.: *The Teaching of Mathematics*, American Elsevier Publishing Company, Inc., Nueva York, 1968.

Kline, Morris: *Mathematics and the Physical World*, T. Y. Crowell Co., Nueva York, 1959.

Kline, Morris: *Mathematics, A. Cultural Approach*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1962.

Kline, Morris: «Mathematical Texts and Teachers: A Tirade», *The Mathematics Teacher*, 49, 1956, 162-172.

Kline, Morris: «The Ancients Versus the Moderns: A New Battle of the Books», *The Mathematics Teacher*, 51, 1958, 418-427.

Kline, Morris: «A Proposal for the High School Mathematics Curriculum», *The Mathematics Teacher*, 59, 1966, 322-330.

Kline, Morris: «Intellectuals and the Schools: A Case History», *The Harvard Educational Review*, 36, 1966, 505-511.

Kline, Morris: «Logic Versus Pedagogy», *American Mathematical Monthly*, 77, 1970, 264-282.

Manheimer, Wallace: «Some Heretical Thoughts from an Orthodox Teacher», *The Mathematics Teacher*, 53, 1960, 22-26.

McIntosh, Jerry A., ed.: *Perspectives on Secondary Mathematics Education*, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1971.

Merriell, D. M.: «Second Thoughts on Modernizing the Curriculum», *American Mathematical Monthly*, 67, 1960, 76-78.

Minsky, Marvin: «Form and Content in Computer Science», *Journal of the Association for Computing Machinery*, 17, 1970, 197-215.

Moise, Edwin: «Some Reflections on the Teaching of Area and Volume», *American Mathematical Monthly*, 70, 1963, 459-466.

Moore, E. H.: «On the Foundations of Mathematics», *American Mathematical Society Bulletin*, 9, 1903, 402-424.

National Council of Teachers of Mathematics: *The Revolution in School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D. C., 1961.

National Council of Teachers of Mathematics: *An Analysis of New Mathematics Programs*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D. C., 1963.

National Council of Teachers of Mathematics: «The Secondary Mathematics Curriculum», *The Mathematics Teacher*, 52, mayo 1959, 389-417.

Neumann, John von: «The Mathematician», ed. en E. B. Heywood, *The Works of the Mind*, University of Chicago Press, 1957.

Nevanlinna, Rolf: «Reform in Teaching Mathematics», *American Mathematical Monthly*, 73, 1966, 451-464.

Sawyer, W. W.: «The Reconstruction of Mathematical Education», *Journal of Engineering Education*, 51, 1960, 98-113.

Smith, D. B.: «Some Observations on Mathematics Curriculum Trends», *The Mathematics Teacher*, 53, 1960, 85-89.

Stone, Marshall H.: «The Revolution in Mathematics», *American Mathematical Monthly*, 68, 1961, 715-734; también en *Liberal Education*, 47, 1961, 304-327.

Stoker, James J.: «Some Observations on Continuum Mechanics», *American Mathematical Society Bulletin*, 68, 1962, 239-278.

Synge, John L.: «Focal Properties of Optical and Electromagnetic Systems», *American Mathematical Monthly*, 51, 1944, 185-187.

Thom, René: «"Modern" Mathematics: An Educational and Philosophical Error?», *American Scientist*, 59, 1971, 695-699.

Weinberg, Alvin M.: «But Is the Teacher Also a Citizen?», *Science*, 149, agosto 6, 1965, 601-606.

Weinberg, Alvin M.: *Reflections on Big Science*, M. I. T. Press, 1967. Cf. especialmente p. 160.

Whitehead, Alfred North: *The Aims of Education and Other Essays*, The New American Library, Nueva York, 1949.

Whitehead, Alfred North: *Essays in Science and Philosophy*, Philosophical Library, Nueva York, 1948.

Wittenberg, Alexander: «Sampling a Mathematical Sample Text», *American Mathematical Monthly*, 70, abril 1963, 452-459.

HECHO EN
MEXICO

impreso en publimex, s.a.
calz. san lorenzo 279-32
cp. 09850, méxico, d.f.
quinientos ejemplares y sobrantes
25 de abril de 1998

Durante los últimos quince años se ha impuesto en las escuelas un plan de enseñanza de matemáticas moderna o de nueva matemática. Se han escrito cientos de nuevos textos, y millones de niños y jóvenes han sido y están siendo enseñados con este nuevo material. Además se han publicado docenas de libros que explican el nuevo plan a padres y maestros.

El dinero, tiempo, energías e ideas invertidas en este programa han sido enormes. Y los resultados —según el profesor Kline— totalmente negativos: una generación de analfabetos en matemáticas, con un temor sin precedentes a este campo de la enseñanza, es la prueba más palpable del fracaso de la matemática moderna. La razón está clara: las nuevas matemáticas están dirigidas a una reducida fracción de estudiantes que algún día serán matemáticos de profesión. Los demás se quedan con una formación matemática apenas suficiente para realizar simples operaciones matemáticas, y sin duda insuficiente para rellenar un impreso de declaración de impuestos.

El autor reconoce que los antiguos métodos de enseñanza de matemáticas eran imperfectos, pero arguye que una enseñanza que excluya los números en beneficio de unos conjuntos bastante vacíos, no satisface los deseos ni las necesidades de la abrumadora mayoría del estudiantado. El profesor Kline ha escrito una incisiva y razonada refutación de la nueva matemática, unida a un persuasivo alegato acerca de la necesidad de que los educadores admitan su error y busquen un remedio eficaz.

Morris Kline es profesor de matemáticas en la Universidad de Nueva York. Entre sus libros figuran *Mathematics in western culture* y *Mathematics and the physical world.*

ISBN 968-

9 789682 316623

siglo veintiuno editores